



A NUMERIKUS MECHANIKA SZEREPE NAPJAINKBAN

THE ROLE OF COMPUTATIONAL MECHANICS TODAY

Páczelt István

¹ Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Műszaki Mechanikai Intézet, Miskolc, Magyarország, istvan.paczelt@uni-miskolc.hu

Abstract

With the proliferation of computers, mechanical problems arising in mechanical engineering practice can be effectively solved. Among the many numerical methods, the present article reports on the development of the finite element method, its development directions, its application possibilities, the importance of error estimation, the requirements supported by the programs and the author's experiences, presenting some numerical examples.

Keywords: *finite element method, approximation, accuracy, variational methods.*

Összefoglalás

A számítógépek elterjedésével a gépészmérnöki gyakorlatban felmerülő mechanikai problémák hatékony megoldására kerülhet sor. Számos numerikus eljárás közül a végelem-módszer kialakulásával, fejlődési irányával, alkalmazásának lehetőségeivel, a hibabecslés fontosságával, a programokkal szemben támasztott követelményekkel, saját tapasztalatokkal foglalkozik a jelen cikk, néhány számpéldát is bemutatva.

Kulcsszavak: *végelem-módszer, approximáció, pontosság, variációs módszerek.*

1. Bevezetés

A mechanika tudománya több évszázados múltat tekint vissza, és ma sem veszít fontosságából. Sőt, a számítástechnikai lehetőségek bővülésével a valóságos viszonyok mind jobb leírására, modellezésére van lehetőség. A mérnök által meghatározott mechanikai modell megoldásának mikéntje jelentősen befolyásolja a sikert, a kapott eredmény valóságát. A jelen cikk az egyik legjelentősebb közelítő számítási eljárás: a végelem-módszer 70 éves múltjára, a közelítési módok lehetőségeire, a hibabecslés fontosságára hívja fel a figyelmet, továbbá saját tapasztalatok bemutatásán, gyakorlati problémák elemzésén keresztül szemlélteti a számítási módszer sokoldalúságát.

1.1. A mechanika kezdete

A bolygók mozgása már régóta izgatta az emberiséget: milyen pályán mozognak, miért látjuk azokat különböző pozíciókban az évszaktól függően, stb. Jelentős áttörést Nikolausz Kopernikusz (1473–1543) megállapításai (nem a Föld a világ

közepe), Johannes Kepler (1571–1630) nézetei a bolygók mozgástörvényeiről jelentettek, továbbá Galileo Galilei (1561–1642) szabadesséssel és a lejtőn való mozgással kapcsolatos kísérletei, Isaac Newton (1643–1727) által a gravitáció megértése, a mozgástörvények megalkotása, majd Gottfried Wilhelm Leibnitzhez köthetően (1646–1716) a differenciálszámítás megalkotása jelentették azt a matematikai alapot, amellyel a mozgások leírása tudományosan létrejöhett. Ezek után számosan, a középkor „óriásai”, Daniel Bernoulli (1700–1782), Leonhard Euler (1707–1783), Jean Le Rond d’Alembert (1717–1783), Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855), Simeon-Denis Poisson (1781–1841), Claude Louis Marie Henri Navier (1785–1836), Augustin Louis Cauchy (1789–1857), Sir George Biddell Airy (1801–1892), William Rowan Hamilton (1805–1865) Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887), Lord John William Strutt Rayleigh (1842–1919) voltak azok, akik jelenős mértékben járultak hozzá az ún. klasszikus mechanika kialakításához.

1.2. Mechanika az 1900-as évektől

Az ipar fejlődésével, a modern eszközök tervezésével fontos igényként jelent meg a megbízható szilárdsági, dinamikai számítások elvégezhetősége. Az egyszerűbb alakokra kidolgozott, pontos megoldásokat fel kellett, hogy váltsa valami közelítő módszer. Először Walter Ritznek (1878–1909), majd Boris Grigorievich Galerkinnek (1871–1945) sikerült variációs módszer révén a differenciálegyenlet-rendszert algebrai egyenletrendszerként kezelni. Eric Reissner (1913–1996) az elmozdulásmező mellett a feszültségmezőt is közelítette, ezzel az ún. többmezős variációs elvek kutatását indította el.

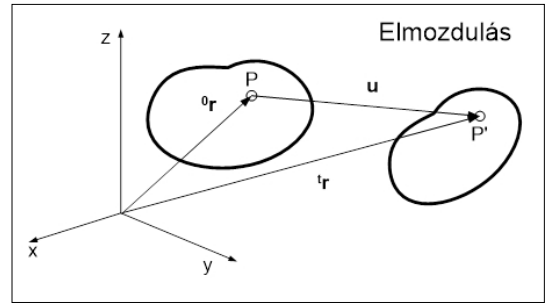
A szilárd testek mechanikájában az alábbi alapmennyiségekkel operálunk: elmozdulásmező $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$, alakváltozási tenzormező $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z, t)$, feszültségi tenzormező $\mathbf{T} = \mathbf{T}(x, y, z, t)$, amelyek $3+6+6=15$ ismeretlen skalármezőt jelentenek a test tetszőleges pontjában. Meghatározásukra lineáris elmélet szerint az $\mathbf{A} = 0.5(\mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u})$ geometriai egyenlet, a $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{A}(\mathbf{u}))$ anyag törvény és a $\mathbf{T} \cdot \nabla + \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{u}}$ mozgásegyenlet (időtől független esetben a $\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{b} = 0$ egyensúlyi egyenlet) szolgál, a feszültségi $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}$, $\mathbf{r} \in S_t$ és a kinematikai $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} \in S_u$ peremfeltételekkel, továbbá dinamikai esetben az alábbi kezdeti feltételekkel:

$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(x, y, z, t=0)$, $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_0(x, y, z, t=0)$. Itt \mathbf{u}_0 , \mathbf{t} , $\mathbf{u}_0(t=0)$, $\dot{\mathbf{u}}_0(t=0)$ adottak, ∇ nábla diff. operátor, „ \circ ”- a diadikus, „ \cdot ” a skaláris szorzás jele, \mathbf{n} a felületi normális vektora, S_p , S_u a felületi altartományok jele, \mathbf{r} a helyvektor.

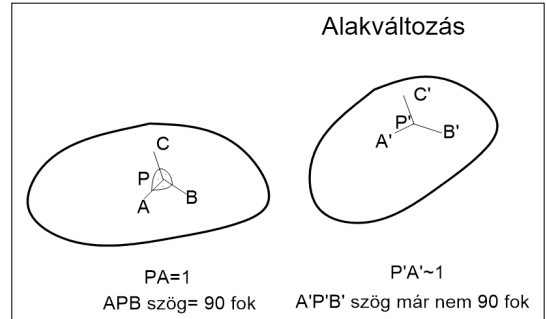
Ezen mennyiségeket szemléltetjük az 1–3. ábrán.

A 15 ismeretlen mező meghatározására az elmozdulásmezőre, ill. a feszültségmezőre vonatkozó parciális differenciálegyenlet-rendszer vezethető le. Általában ezek pontos megoldása csak kevés geometriára és speciális peremfeltételekre adott.

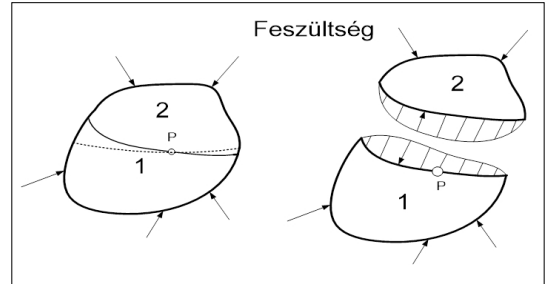
Ismeretes, hogy speciális geometria esetén a háromdimenziós, 3D-s feladatot redukálni lehet 1D-s, ún. rúd-, 2D-s lemez-, ill. héjfeladatokra. Rudaknál a Jacob Bernoulli-, a Stephen P. Timoshenko-féle (1878–1972) modellek terjedtek el, míg lemeznél a nyírási alakváltozást is figyelembe vevő Raymond David Mindlin-féle (1906–1987) modell, míg héjagnál a Paul M. Naghdi-féle (1924–1994) modell. A klasszikus lemez- és héjmodellek a Gustav Robert Kirchhoff-elvre (1824–1887) épülnek fel (a normális az alakváltozás során is merőleges marad meggörbült középfelületre).



1. ábra. Elmozdulási vektor



2. ábra. Alakváltozás érzékeltetése a P pontbeli kísérő triáderon

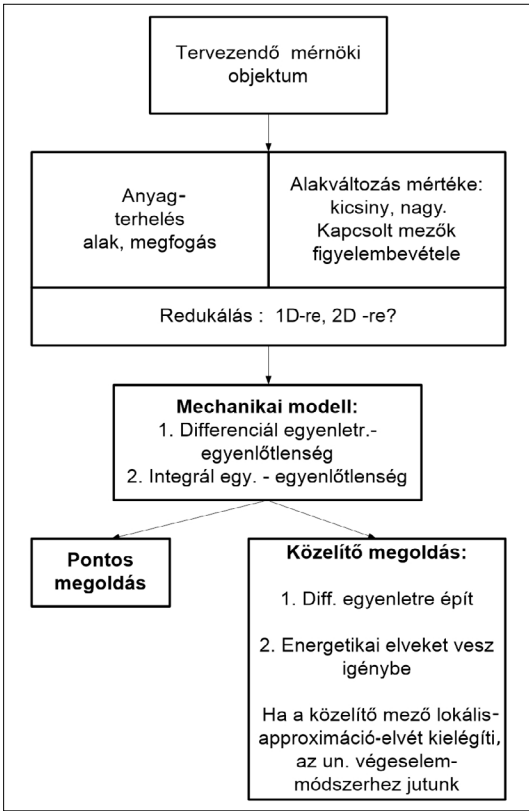


3. ábra. Az egyensúlyt biztosító, belső felületi megoszló terhelés, azaz feszültség

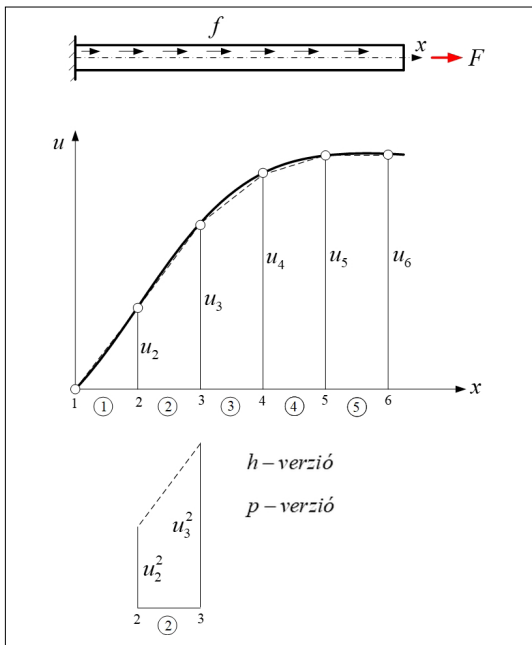
Ezekkel a modellekkel a mérnöki gyakorlatban számos feladatot sikeresen oldottak meg, oktatásuk a mai műszaki felsőoktatásban továbbra is létjogosult.

A gyakorlati életben a tervezés egy fontos oldala a megtervezendő objektum lényeges tulajdonságainak még a megvalósítás előtti előrejelzése, az optimális kialakítás elérése érdekében. Ehhez a mechanikai számítások megbízható elvégzése is szükséges, amihez egy modell kell elkészíteni. A 4. ábrán láthatjuk a különféle szempontok figyelembevételének lehetőségét.

A továbbiakban a közelítő megoldással kapcsolatos végeselem-módszer [1, 2, 3] történetét vizsgáljuk fel.



4. ábra. A modellezés főbb szempontjai



5. ábra. Elmozdulásmező közelítése végeelem-módszerrel

2. Végeelem-módszer

A módszer lényegét az 5. ábrán vázolt húzott rúd példáján keresztül lehet könnyen megmagyarázni. A rudat elemekre bontjuk fel, az elemek határán lévő pontokat csomópontoknak nevezük. Ezekben a pontokban az elmozdulás legyen u_i , $i = 1, \dots, 6$. Közelítsük elemeken belül az elmozdulást lineáris függvénnyel (szaggatott vonal). Nyilván, ha több elemet veszünk fel, az elemeken belüli szaggatott, lineáris függvény közelebb kerül a ténylegeshez. Mivel kezdetben a megoldás nem ismert, ennek közelített függvényét a potenciális energia minimumelvből kaphatjuk meg, azaz algebrai egyenletrendszerből a csomópontbeli elmozdulásokat fogjuk kiszámolni. Érezzük, hogy több elemmel pontosabb megoldást fogunk kapni.

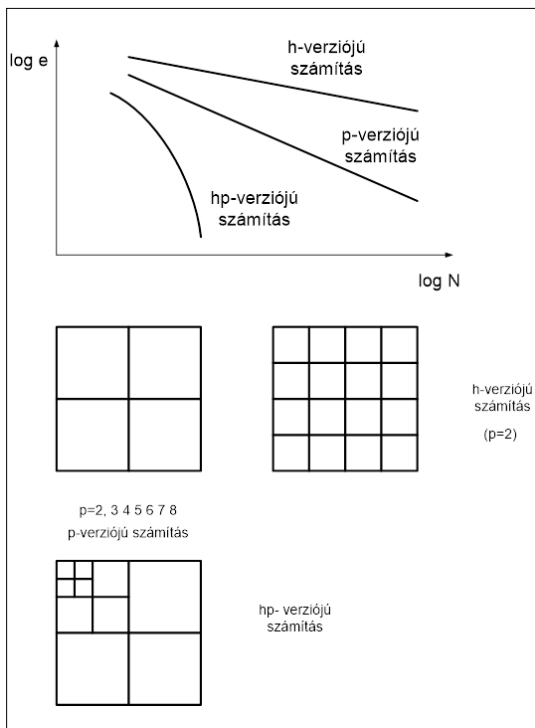
Mivel az elemek hossz méretét csökkentettük, ezt a közelítő megoldást h verziós számításnak nevezik.

Egy másik megoldási mód is lehetséges. Nem az elemek számát növeljük, hanem az elemen belüli közelítő polinom fokszámát. Ezt a világon először 1973-ban Szabó Barna javasolta (jelenleg az MTA külső tagja, a St Louis-i Washington Egyetem professor emeritusa). Javaslataira a matematikusok elkezdtek foglalkozni ezzel a p verziós közelítési módszerrel, vizsgálva a megoldás konvergenciájának a mértékét is. Azokat a felosztási technikákat, ahol a feszültségi szingularitási helyek környezetében az elemek méretét is csökkentik a fokszám növelésével együtt, az eljárást hp verziójú számításnak nevezik. Alakváltozási energiák hibájának log-értéke az ismeretlenek össz-számának log-értékében jelentősen, más és más függvény szerint változik, amit a 6. ábra szemléltet. A leglassúbb konvergenciával a h verziós technika rendelkezik [1, 2, 3]. Tehát érdemes a p , hp verziós számításokra alkalmas programokat használni konkrét feladatok megoldásakor.

Bizonyított [1], hogy a hiba $\|e\| \leq kN^{-\lambda}$ szerint számolható, ahol N a megoldandó feladat ismeretlenjeinek a száma.

Mivel az e -ben a pontos megoldás energiája sem ismert, továbbá a k és λ paraméterek sem, ezért a hiba mértékének becsléséhez minimum 3 számítást kell elvégezni különböző rendű approximációval.

A módszer kialakulásának történetével kapcsolatban megemlítjük, hogy az 1956-ban megjelent, M. J. Turner és társai által írt cikket tekintjük az elsőnek, majd 1960-ban R. W. Clough nevéhez kötődik a végeelem elnevezés. Rövid időn belül számos nagy programrendszer nyert kidolgozást



6. ábra. A megoldás konvergenciája

(1964: ASKA, 1969: SAP, NONSAP, 1969: MARC, ANSYS, NASTRAN).

1967-ben kiadásra kerül az első, O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheung által írt, végelemek-módszerrel kapcsolatos könyv. További programrendszereket alkottak: 1972 ABAQUS, ADINA, 1976 DYNA, 1980-as években SYSTUS, COSAR, LSDYNA, PROBE, StressCheck, RASNA, I-DEAS, COSMOS/M, FEAP, FLUENT, SYSWELD, ProCAST, DEFORM.

Elméleti vonalon 1981-ben a p , 1984-ban a h verziós számítás konvergenciája nyert bizonyítást. 1991-ben a hierarchikus modellezés kap megfogalmazást, 2006-ba az ASME szabványosítja a végelemek-program helyes használatának feltételeit, ill. 2012-ben elindul a számítás megbízhatóságának megfogalmazása.

Végelemek-programokkal szemben megfogalmazott feltételek:

- Geometria kényelmes leírása (saját rendszerbeli programmal vagy más rendszerből átvett adatokra támaszkodva).
- Bő elemkészlet (alacsony és magas fokszámú elemek).
- Az automatikus elemfelosztás lehetősége.
- Megfogások, egyéb külső hatások egyszerű megadása.

- Speciális modellezési fogások lehetősége (pl. alszerkezet-technika).
- Anyagtörvények bő választéka.
- Lineáris, nemlineáris elméletek használati lehetősége.
- A terhelések széles választéka.
- Gyors számítás (többprocesszoros algoritmus, hatékony egyenletrendszer-megoldók: direkt megoldóval, ill. iterációval).
- Hibaanalízis. A számítás pontosításának lehetősége. Az eredmények kombinálása, grafikus szemléltetése.

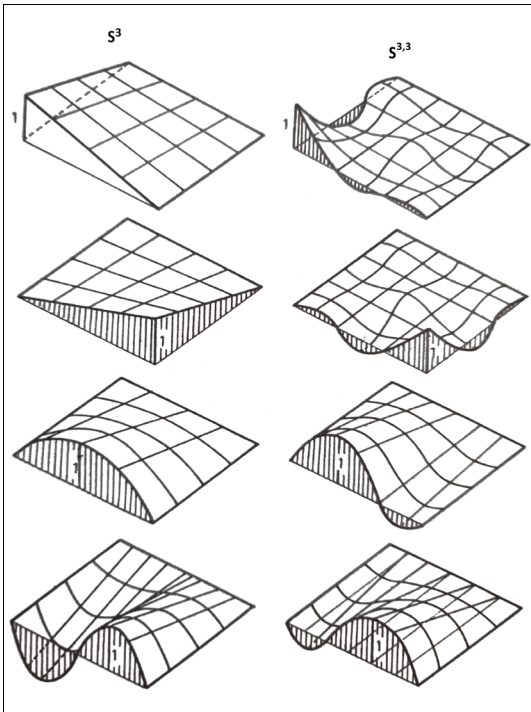
A kezdeti időkből a végelemek-programrendszerek nagy központi számítógépekre voltak telepítve, amelyek terminálokon keresztül voltak elérhetők. A 80-as évektől kezdődően, a személyi számítógépek megjelenését követően a végelemek közel került a felhasználóhoz, sőt a grafikai lehetőségek felhasználóbarátta tették a módszer használatát. A téma fontosságára tekintettel a felsőoktatási intézményekben külön kurzusokat szerveztek a módszer ismertetésére, annak számítógépes termekkel való közvetlen elérésére. Jelentősen megnövekedett a kutatás is új elemek, eljárások alkotására, ipari elterjesztésére fókuszálva. Számos konferencia szerveződött a végelemekmel foglalkozók részére, gyümölcsöző kapcsolatok kiépítésére.

Tanszékünkön is számos program került kifejlesztésre az embargó akkori hátrányait leküzdendő: többek között kidolgozást nyert a héjak, tartályok számítására a TESZGA, autóbuszvázak számítására az AUTOBUSZVAZ (az AUTÓKUT támogatását is kihasználva), BANYAVAG a KBFI, LAPÁT a GANZ-MÁVAG részére, ROBOT és SIK a VIDEOTON részére, ABRONCS 1, 2, 3 a TAURUS megbízásából, továbbá a FEM3D, a bonyolult felépítésű rugalmas szerkezetek szilárdsági és dinamikai problémáinak a megoldására szolgáló, végelemekes programrendszer.

Érdekes összehasonlítani a klasszikus Lagrange-alakfüggvényekkel operáló, h verziós számításoknál használt négyzetes elemek alakfüggvényeit és a p verziós számításokhoz használt, Legendre-függvényekkel, ill. az ezekből levonható számítástechnikai előnyöket, hátrányokat is elemezni.

A 7. ábra bal oldalán a p verziójú alkalmazott, az elem első oldalához kötött alakfüggvények láthatók, hasonlóan a jobb oldalon a Lagrange-függvényeket használó h verziós elem [3].

Látjuk, hogy a p verziójú a p növelésével, $p=1$ -hez a felső két ábra tartozik, $p=2$ -nél belép egy újabb négyzetes függvény, majd lentebb a



7. ábra. Alakfüggvények a p és h verziós elemeknél

7. ábrán a köbös függvény. Ha tehát $p=2$ -s a közelítés, az elemek csak a $p=1$ és $p=2$ -höz tartozó függvények dolgoznak, ha $p=3$ lesz, akkor újabb függvények lépnek be, nem elrontva a korábbiakat. Ez a h verziós, jobb oldalon vázolt esetben már nem áll fenn. Négyzetes közelítésnél a sarokpontokon kívül az oldalfelező pontok jelennek meg, azaz összesen nyolc pont, míg a köbös közelítésnél az oldalakon újabb 1-1, vagyis összesen 12 csomópontunk van, de a felvett alakfüggvények már nem azonosak a korábbiakkal, hiszen a Lagrange-függvények kötelesek a csomópontokban zérusnak lenni, kivéve egy pontot. Ez azt jelenti, hogy az alacsonyabb rendű közelítésnél kiszámlolt merevségi mátrix már nem lesz felhasználható, míg a p verziónál a korábbi, az újabb egy részének fog megfelelni. Az a követelmény, hogy minimum 3 számítást végezzünk el, a p verziónál nagyon jól programozható (lásd pl. StressCheck program [4]).

Formálisan a diszkrétizálás után a

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f} \tag{1}$$

differenciálegyenletet kapjuk, ahol \mathbf{M} a tömeg, \mathbf{C} a csillapítási, \mathbf{K} a merevségi mátrix, \mathbf{f} a terhelési vektor, \mathbf{q} a csomóponti elmozdulások vektora (ismeretlen).

Nemlineáris (statikai) esetben a növekményekre vonatkozólag írható fel egyenlet

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{q} = \mathbf{f}_n - \mathbf{f}_{\sigma_n} \tag{2}$$

A csomópontok elhelyezéséből adódóan a fenti mátrixok szalagstruktúrával rendelkeznek. A szalag sáv szélességének csökkentése a számítási idő csökkenését adja, emiatt sávcsökkentő eljárásokat is tartalmaznak az igényes végelem-programrendszerek.

A számításnál fellépő hibák csökkentésére automatikus hálójárasztási stratégiák is kifejlesztésre kerültek.

Nemlineáris feladatok külön osztályát jelöli ki a testek közötti érintkezési viszonyok tisztázása. Ekkor az érintkezési felületeken egyenlőtlenségek írhatók fel [5]. Tehát egyenlőtlenségi rendszert kell megoldani!

Ezek megoldására a matematikai programozás eljárásait, ill. speciális iterációs módszereket lehet alkalmazni érintkezési végelemek létrehozásával.

Az alakváltozás utáni hézag a testek között a szóba jöhető érintkezési tartományon (lásd 8. ábra):

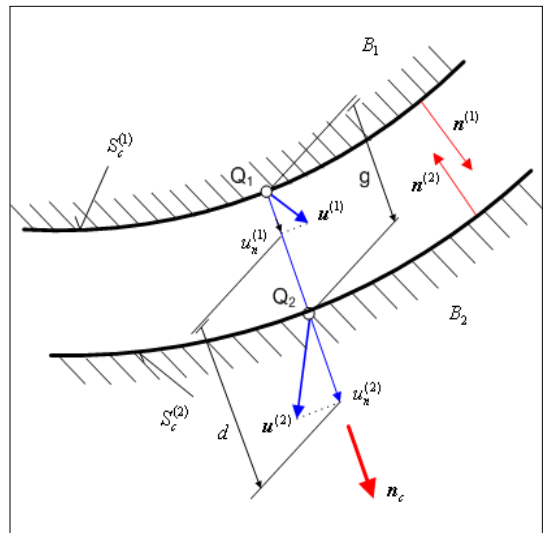
$$d = u_n^{(2)} - u_n^{(1)} + g \quad \mathbf{r} \in S_c = S_0 \cup S_p \tag{3}$$

Ha

$$d \geq 0, p_n = 0 \quad \mathbf{r} \in S_0 \text{ rész,}$$

$$d = 0 \quad p_n \geq 0 \quad \mathbf{r} \in S_p \text{ érintkezés,} \tag{4}$$

de $d p_n = 0 \quad \mathbf{r} \in S_c$



8. ábra. Érintkezési elmozdulások és a kezdeti rés g

3. Példák

Itt csak két egyszerűbb feladatot mutatunk be.

3.1. Hengeres testek érintkezése

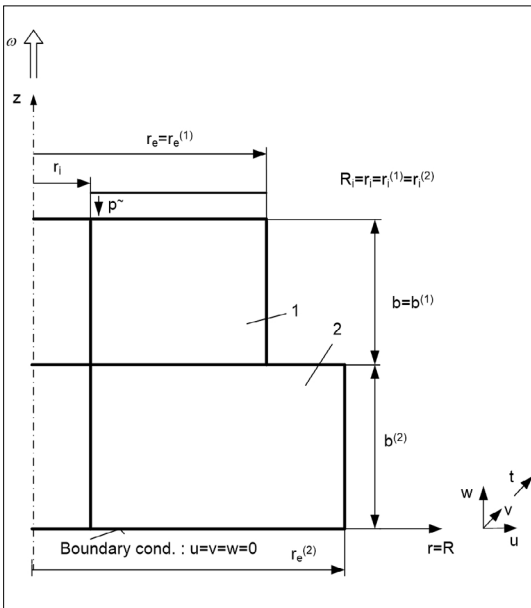
Vizsgáljuk két azonos anyagú hengeres test érintkezését. A belső furatok sugara $r_i = 20$ mm, a külsőké $r_e^{(1)} = 120$ mm, $r_e^{(2)} = 140$ mm, míg a magasságuk $b = b^{(1)} = b^{(2)} = 100$ mm (9. ábra). A B_1 felső henger alsó meridiánja az alábbi függvény-nel jellemzett:

$$g = 0,0035(r - 20)^2, \tag{5}$$

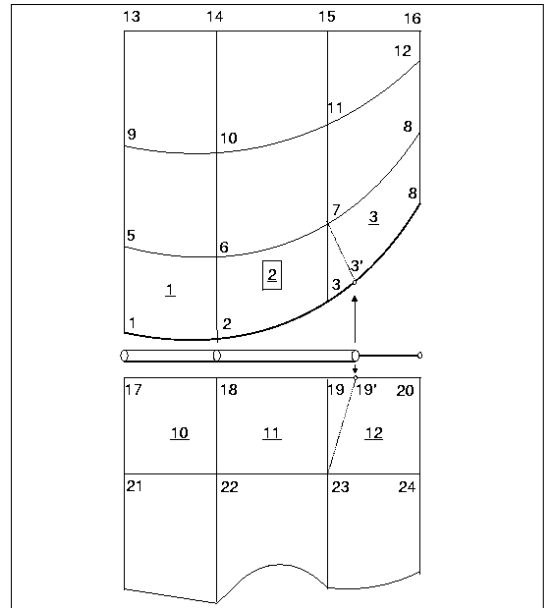
ami egyúttal a testek közötti kezdeti hézagnak felel meg. A testek anyagának Young-modulusa $E = 2 \cdot 10^5$ MPa és Poisson tényezője $\nu = 0,3$. A B_1 test felső peremének függőleges elmozdulása adott: $w_0 = 0,15$ mm.

A megoldást $p = 8$ fokú végeselemekkel modellezük. A kezdeti hálót ún. mozgatási technikával módosítjuk oly módon, hogy az érintkezési határra essék a végeselem csomópontja [6]. Ezzel a feszültségek oszcilláció-mentességét tudjuk elérni. A 10. ábrán az érintkezési tartomány vége nem esik egybe a 2. és a 11. elem jobb oldali végével, tehát el kell mozgatni a 3. és a 19. jelű csomópontokat. A 11. ábra ezt mutatja 7×5 -ös hálónál, illetve a σ_z normálfeszültség megoszlását láthatjuk a 12. ábrán.

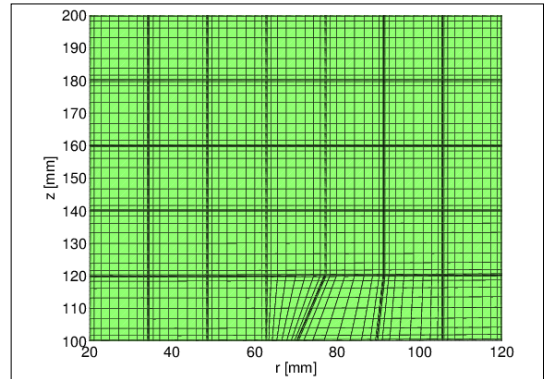
A további pontosító megoldási technikákat lásd a [7] alatti tanulmányban.



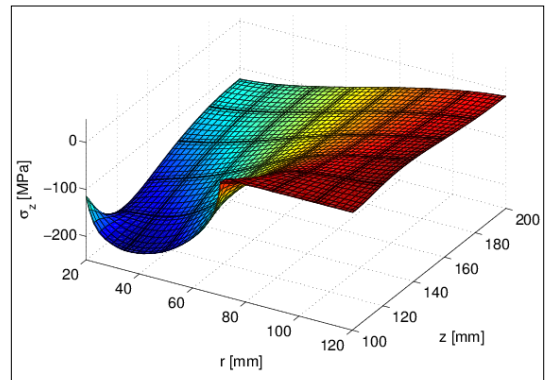
9. ábra. Két hengeres test érintkezése



10. ábra. A 3 – 3', 19 → 19' csomópontok mozgatása



11. ábra. Módosított 7×5 -ös háló, az érintkezési tartomány szélének sugara $r_p = 70,37$ mm



12. ábra. σ_z normálfeszültség megoszlása

3.2. Görgő lekerekítése

Az előzőkben leírtakhoz képest egy teljesen más típusú feladatot vizsgálunk most meg. Egy hengergörgő lekerekítését kell oly módon meghatározni, hogy a nyomás a meridián síkjában általunk megadott lefutású legyen. Ezt az érintkezési nyomás részleges vezérlésével tudjuk elérni [5, 8].

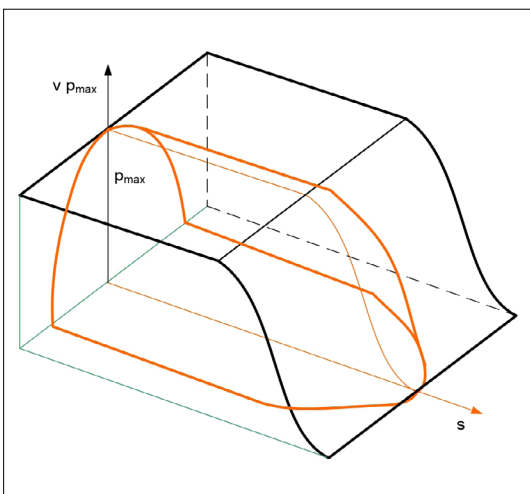
A módszer alapötletét jól mutatja a **13. ábra**.

Van egy „háztetőn”, amely alatt kell, hogy elhelyezkedjen a nyomás. Mivel a legnagyobb érték a meridiánsíkban lép fel, itt a nyomás hozzáér a háztetőhöz, a többi helyen alatta van. A meridián-sík-beli nyomás lefutását spline (Hermite-) függvényekkel írhatjuk elő. Ábrán a görgő fele látható. Az állandó szakasz hosszától függően különböző magasságú és lefutású nyomásokat fogunk kapni. A tervezőnek kell eldönteni, melyik variáns tartja a legjobbnak. Döntő lehet pl. görgőcsapágynál a kifáradási határ előírási kritériuma.

A **14. ábrán** az optimalizálási feladat megoldásából kapott sugar változását, a meridiánba eső nyomást, az eredeti, állandó sugarú görgőnél kapott, a végén magasra emelkedő nyomást, ill.

az optimális, lekerekített görgő nyomását láthatjuk, a megoldás egynegyedét szemlélve.

A vezérlő függvény biztosítja, hogy a görgő végén a nyomás és az s szerinti deriváltja is zérus legyen. A feladat felállításánál a rugalmas testeket a rugalmas féltérre vonatkozó, Boussinesq-féle megoldásból kapott hatásfüggvény révén vettük számításba [5]. A felvett felületi elemek száma 10×40 . A terhelés 8000 N , a görgő sugara $3,5 \text{ mm}$, a vizsgált érintkezési tartomány $0,2 \times 7 \text{ mm}$.



13. ábra. A nyomás részleges vezérlését előíró függvény

4. A végeelem-módszer jövője

Tény, hogy amíg az 50-es években a lineáris feszültségi analízisben a mérés 95%-os arányt képviselt, a 70-es években 50%-ot, a 90-es években már csak 1%-ot a 99%-os számítógépes szimulálás mellett. A numerikus mechanika lehetőségei egyre nőnek a mindennapok gyakorlatában, s ezek gyakorlati haszna egyértelmű.

Azt is tapasztaljuk, hogy a megrendezésre kerülő hazai, nemzetközi konferenciák számos esetben a numerikus kutatásokra fókuszálnak, bemutatva a tervezői mérnöki feladatok sokszínűségét is. Pl. az 1997-ben San Franciscóban megrendezésre kerülő USACM (USA, számítógépesmechanika-kongresszus)-on 96 szekcióban 450 előadás szerepelt.

Európában az ECCOMAS szervez 4 évente hasonló konferenciákat.

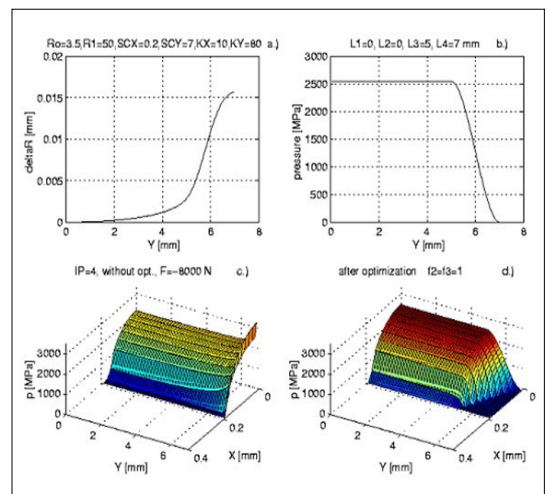
A nagyszámú résztvevő is jelzi a kutatások fontosságát, illetve azt a tényt, hogy komoly erők munkálkodnak a mechanika területén is, újabb és újabb területeket meghódítva.

A végeelemmel foglalkozó folyóiratok nagy száma, a megjelent könyvek minősége aláhúzzák e tudományterület fontosságát, élni akarását, az utánpótlás nevelésének sürgető igényét.

5. Következtetések

Megállapíthatjuk, hogy egy új szakma jelent meg, amely

- mechanikai problémák analízisével, optimalizálásával,
- speciális szoftverek fejlesztésével,
- modellek identifikálásával,



14. ábra. A görgőlekerekítés eredménye

- számítógépes rendszerek betanításával, telepítésével,
 - a mechanikai numerikus módszerek fejlesztésével, tanításával foglalkozik.
- Mindezzel összefüggésben azt is állíthatjuk, hogy a mechanika szerepe felértékelődik, erősödik, hiszen
- pontosított modellek építhetők fel,
 - összetett rendszerek (szilárd test-folyadék/gáz alkotta rendszer, piezoelektromos elemeket tartalmazó intelligens szerkezetek) statikai, dinamikai vizsgálatára nyílik lehetőség.
 - Új gépek, szerkezetek tervezésekor, gépgyártás-technológiai folyamatok vizsgálatakor a mechanikai állapotok szimulálására szolgáló nagy szabadságfokú végeelem-/peremelem-módszerre alapozott numerikus technikákkal kényelmesen kezelhetővé váltak a megoldandó problémák.
 - A hibabecslés és az eredmények automatikus pontosítása a programtól elvárt, megkívánt szolgáltatás.
 - Komplex tervezői rendszerek állnak rendelkezésre, amelyekhez könnyen csatlakoztathatók a mechanikai modellek analizésére alkalmas számítógépi programok.
 - Az új termékek és technológiák fejlesztésével kapcsolatos, éles piaci versenyben a korszerű szilárdságtani, dinamikai, multidiszciplináris ismeretek stratégiai fontossággal bírnak, és mindez nagyban növeli az ezen ismeretekkel bíró mérnökök értékét.

Szakirodalmi hivatkozások

- [1] Szabó B., Babuska I.: *Finite Element Analysis*. New York, Wiley-Interscience, 1991.
- [2] Szabó B., Babuska I.: *Introduction to Finite Element Analysis, Formulation, Verification and Validation*. A John Wiley and Sons, Ltd., Chichester, UK, 2011.
- [3] Páczelt I.: *Végeelem-módszer a mérnöki gyakorlatban*. I. és II. kötet. Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc, 1999, 2025.
- [4] Engineering Software Research and Development, Inc. (ESRD): StressCheck program <https://www.esrd.com/>
- [5] Páczelt I.: *Iterative Methods for Solution of Contact Optimization Problems*. Archives of Mechanics, 52. (2000) 685–711.
- [6] Páczelt I., Szabó B., Szabó T.: *Solution of Contact Problem Using the Hp-Version of the Finite Element Method*. Computers and Mathematics with Applications, 38. (1999) 49–69. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(99\)00261-8](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(99)00261-8)
- [7] Páczelt I., Baksa A., Szabó T.: *Formulation of the P-Extension Finite Elements for the Solution of Normal Contact Problems*. Journal of Computational and Applied Mechanics, 15/2. (2020) 135–172. <https://doi.org/10.32973/jcam.2020.009>
- [8] Páczelt I., Baksa A., Szabó T.: *Product Design Using a Contact-Optimization Technique*. Strojnicki Vestnik-Journal of Mechanical Engineering, 53/7-8. (2007) 442–461.