Műszaki Tudományos Közlemények vol. 21. (2024) 48–55.
DOI: Magyar: https://doi.org/10.33895/mtk-2024.21.07
Angol: https://doi.org/10.33894/mtk-2024.21.07

AZ EVOLVENS FOGASKERÉKPÁR CSÚSZÁSÁNAK EGZAKT MODELLEZÉSE

NON APPROXIMATIVE MODELLING OF INVOLUTE GEAR PAIR SLIDING

Máté Márton,[1] Szőcs Krisztina[2]

[1] *Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Marosvásárhelyi kar, Gépészmérnöki Tanszék. Marosvásárhely, Románia, mmate@ms.sapientia.ro*

[2] *Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Marosvásárhelyi kar, Gépészmérnöki Tanszék. Marosvásárhely, Rosmánia, szocs.krisztina@student.ms.sapientia.ro*

Abstract

One of the main problems with the operation of involute tooth gears is that during engagement, the tooth profiles slide. The point of contact is the only point where pure rolling occurs among the engaging tooth profiles. The sliding, coupled with abrupt changes in load, collectively contribute to the failure and various malfunctions of the gears. In this research, I study the behavior of gears theoretically during sliding. I examine existing mathematical models for describing sliding and analyze their results. Then, I present a precise mathematical model that I have developed. In creating the model, my aim was to avoid any geometric approximations and only consider the profile points where actual engagement between the gears could occur. Therefore, I interpret the contact points within the real engagement zone. My goal is to create a mathematical solution that is equally applicable to simple and general involute tooth gear drives and provides an accurate, realistic description of the relative sliding of gears.

Keywords*: gear, sliding, exact method, gear engagement.*

Összefoglalás

Az evolvens fogazatú fogaskerekek működésének egyik fő problémája az, hogy a kapcsolódás során a fogprofilok csúszva gördülnek. A csúszás a terhelés ugrásszerű változásával közösen okozza a fogaskerekek tönkremenetelét és különböző meghibásodásait. Dolgozatomban a fogaskerekek viselkedését elméleti síkon tanulmányozom, csúszás során. A csúszás leírására szolgáló, létező matematikai modelleket és azoknak az eredményeit vizsgálom, majd egy általam létrehozott, egzakt matematikai modellt vezetek fel. Az általam javasolt modell létrehozása során szempontjaim között szerepelt, hogy kerüljek bármely geometriai közelítést, és csak azokat a profilpontokat vizsgáljam, ahol ténylegesen létrejöhet a kapcsolódás a fogaskerekek között. Tehát, a kapcsolódási pontokat a valós kapcsolódási szakaszon belül értelmezem. Célom, hogy egy olyan matematikai megoldást hozzak létre, amely egyformán alkalmazható elemi és általános fogazatú evolvens fogaskerékhajtásokra, és pontos, valósághű eredménnyel szolgál a fogaskerekek relatív csúszásának a leírására.

Kulcsszavak*: fogaskerék, csúszás, egzakt módszer, fogaskerekek kapcsolódása.*

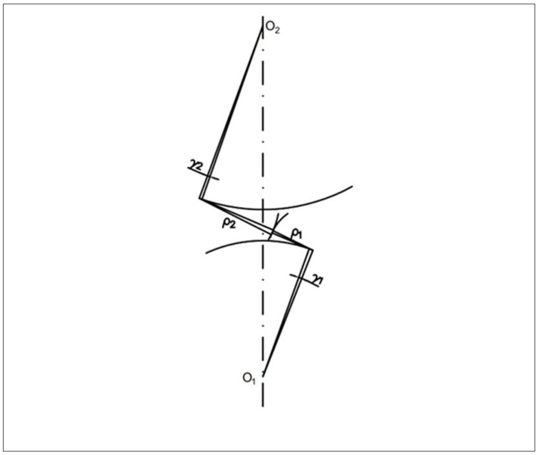
1. Bevezetés

A fogaskerékhajtások esetén, a ciklois hajtás kivételével, a fogak nem tisztán gördülnek le egymáson, csúszás lép fel. Ez a fogak rohamos kopásához vezethet. A fogak gyakori meghibásodásai közé tartoznak a fogfelületi sérülések, mint a progresszív kopás, a pitting és a berágódás. A fogfelületek közti csúszás kopást okoz, főképp az összeszerelést követő „bejáródási” szakaszban, amikor a fogfelületek kiemelkedő mikrogeometriai egyenetlenségei az ellenkerékkel való csúszás következtében lekopnak. Ez a fajta kopás idővel csökken, majd megszűnik. Nem tekinthető hibának, mert a fogaskerekek érintkezési felületének növekedéséhez vezet, amelynek következtében a hajtás várható élettartama megnő. A problémát a progresszív kopás jelenti, amely abban az esetben lép fel, ha a kopás a bejáratási szakasz után fokozódik. Ennek okai közé sorolhatjuk a következőket: hiányos vagy elégtelen kenés, nem megfelelő kenőanyag, illetve az abba került szennyeződés vagy a fogfelületek elégtelen keménysége. A pitting a fogfelület és a gördülőfelület metszésvonala tájékán mutatkozik. A megjelenésének oka, hogy a felületi nyomófeszültség és a fogfelületek egymáson való csúszása által ébresztett nyírófeszültség meghalad egy, a ciklusszámhoz kapcsolódó határértéket. Először apró hajszálrepedések jelennek meg a gördülőfelületi fogirányvonal tájékán, a felületek alatt, ahol az összetett igénybevétel a legnagyobb értékű. Ahogy ezek a hajszálrepedések eljutnak a felületig, anyagdarabkák töredeznek ki, helyükön gödröcskéket képezve, amelyeknek a szélei érdesek. A pitting oka főképp az anyag felületi kifáradása nem megfelelő méretezés vagy egyenlőtlen felületi terheléseloszlás miatt, valamint a fogfelületek nem megfelelő keménysége. A karcok a fogfelületen a fogprofilok csúszásának irányába mutató rövid, egyenes, nagyon kis mélységű hornyok, amelyeket a kenőolajba került porszemcsék vagy egyéb apró szennyeződések okoznak. A barázdák a karcoknál mélyebbek, és csoportosan lépnek fel. Nem megfelelő kenés végett fémes érintkezés jön létre a fogfelületek között, és azok pillanatnyilag összehegednek. Viszont a fogfelületek relatív csúszása végett az összehegedt részecskék az egyik fogfelületből kiszakadnak. Az így kiszakadt részecskék a kenőolajat szennyezik, és ezáltal további sérüléseket okozhatnak a fogfelületen. Ez a jelenség a berágódás. A XX. században számos tanulmány témája volt a fogaskerekek terhelhetőségének és élettartamának növelése. Áthatóan tanulmányozták a fogfelületek között fellépő csúszást, illetve a csúszási sebességet. Vidéki [1] rálátott az élettartam és a csúszási sebesség közötti szoros kapcsolatra. Megállapította, hogy a csúszási sebesség csökken, ha a tengelytávolságot növeljük, amennyire a fogazat biztosította lehetőségek megengedik. Diker [2], Szeniczei [3] és Bolotovszkij [4] a fogaskerékhajtások méretezésénél a relatív csúszást vették alapul. Szeniczei elkészítette a relatív csúszást leíró modellt evolvens profilú fogaskerékhajtásokra. Ez a modell közelítésen alapszik, hiszen az evolvensívhossz helyett a simulókör ívhosszával számolt, ahol a simulókörnek a sugara a görbületi sugárral egyenlő. Számításai szerint, a körívek hosszát a görbületi sugár, jelölés szerint ρ és a fogaskerék szögelfordulásának, jelölés szerint γ, szorzataként kaphatjuk meg, amely az előzőek alapján az egyik fogaskeréken $\rho_1 \cdot \gamma_1$, a másik fogaskeréken $\rho_2 \cdot \gamma_2$. A relatív csúszást az ily módon kiszámított körívek hosszának különbségének a kisebb körívhosszhoz való viszonyításából kapjuk.

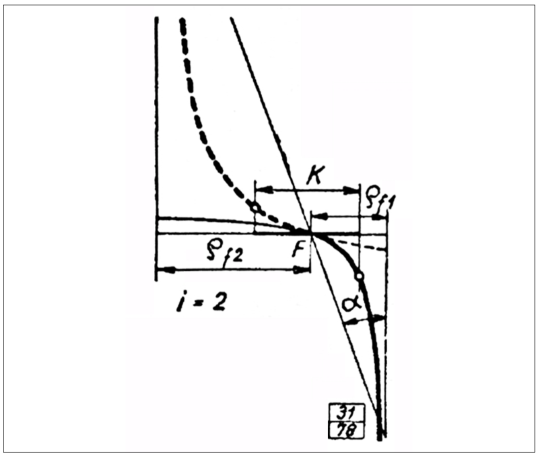
Tehát, az 1. ábra alapján a relatív csúszás értéke:

$$\chi = \frac{\rho_1 \cdot \gamma_1 - \rho_2 \cdot \gamma_2}{\rho_1 \cdot \gamma_1} \quad (1)$$

A relatív csúszást a modell alapján egy hiperbolafüggvény írja le, amely mutatja, hogy a relatív csúszás a főpontban zérus, és onnan távolodva folyamatosan növekszik (2. ábra).



1. ábra. *A fogaskerekek a kapcsolódás pillanatában*



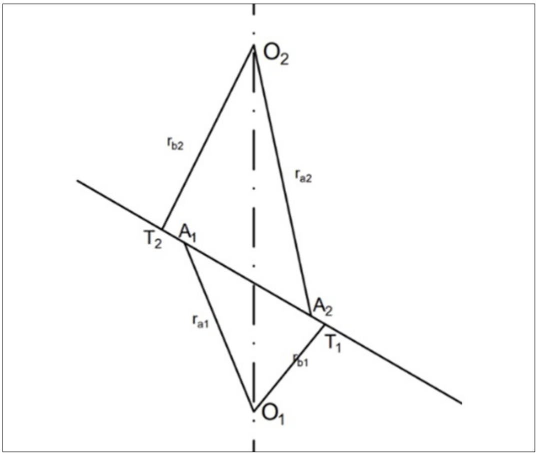
2. ábra. *A relatív csúszásgörbe* [3]

A modell ugyanakkor azt is mutatja, hogy a kapcsolódás főpontjában a relatív csúszás értéke zérus. Ez azt vonná maga után, hogy abban a pontban nincs kopás. Ennek az állításnak Gavrilenko [5] kísérletei ellentmondtak. Kísérletei által új módszert hozott létre a fogaskerekek méretezésére. A csúszásgyorsulásokat használta fel a fogfelületkopások helyének és nagyságának a meghatározásához. A fogfelületek tönkremenetelét a relatív csúszás hely szerinti deriváltjának a kapcsolóvonal menti változásával írta le. A Ganz–Botka-féle evolvens fogazatrendszer alapját szintén a relatív csúszás adja. Botka [6] a fogaskerekek tervezésekor a relatív csúszás kiegyenlítésére törekedett. Bizonyította, hogy ha a kapcsolódási határpontokban a relatív csúszás értékei ki vannak egyenlítve, akkor az maga után vonja a fogfelületek pillanatnyi hőmérséklet-emelkedésének és Hertz-féle feszültség és a csúszási sebessége szorzatainak a kiegyenlítését és minimalizálását.

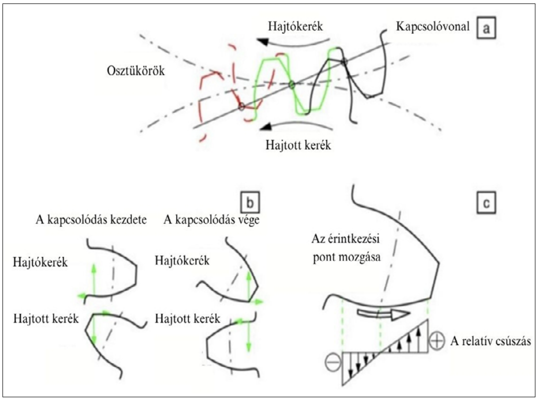
Napjainkban is folynak a kutatások a fogaskerékhajtások méretezéséről, amelyekben a relatív csúszást, illetve a csúszásgyorsulásokat használják fel [7]. Számos tanulmány alapja, amely a relatív csúszáshoz kapcsolódik, megegyezik a Szeniczei által javasolt modellel, amely csak közelíti a valós geometriai viszonyokat. Dolgozatomban ezt a modellt kívántam újragondolni, úgy, hogy elkerüljem a geometriai közelítéseket. Kutatásom célja ezáltal, hogy egy pontosabb, valóságot tükröző értéket kapjak a relatív csúszásra. Feltételezésem szerint ez a jövőben hozzásegíthet növelt élettartamú fogaskerékhajtások tervezéséhez.

2. A javasolt matematikai modell

A kutatásom alapját az képezte, hogy elkerüljek bármelyfajta geometriai közelítést a relatív csúszás felírása során. Azokat a pontokat kívántam vizsgálni, ahol a fogfelületek közötti kapcsolódás ténylegesen létrejöhet, így a kapcsolódási pontokat a valós kapcsolódási szakaszon belül értelmeztem. Ennek elérése érdekében az Erney-féle vonalas ábrát vettem alapul, amely a fogaskerékhajtás lényeges geometriai elemeit tartalmazza a körök felrajzolása nélkül [8]. Az ábra szerint a kapcsolóvonalat az alapkörök közös érintője képezi. A tulajdonképpeni kapcsolódás az A_1A_2 szakaszon jön létre, amelyet a kapcsolóvonal és a fejkörök A_1, illetve A_2 metszéspontjai határoznak meg (3. ábra). Az elméleti kapcsolószakaszt az alapkörök kapcsolóvonalat érintő T_1 és T_2 pontjai határozzák meg.



3. ábra. *Az Erney-féle vonalas ábra egyszerűsített modellje*



4. ábra. *A fogaskerékhajtások csúszása,* [9]
a) A fogak kapcsolódása hajtás során;
b) A fogak pozíciója a kapcsolódás elején és végén; c) A fogakon fellépő relatív csúszás

Az 4.a. ábrán láthatjuk a kapcsolóvonal és a fogak helyzete közötti kapcsolatot. Látható, hogy a kapcsolódási pontok bármely esetben a kapcsolóegyenesen helyezkednek el. Az 4. c. ábra üzenete ekvivalens a 2. ábrán látottakkal: a főpontban a relatív csúszás értéke zérus, onnan távolodva folyamatosan növekszik.

A következőkben ellenőriztem a fogaskerékhajtás optimális méretezését. Megvizsgáltam, hova esik a talpkörök által kimetszett pont a kapcsolóegyenesen. Ez abból a szempontból jelentős, hogy amennyiben az elhelyezkedésük nem megfelelő, a hajtópár újraméretezését követelné a feladat, hiszen ezeken a körökön belül a helyes kapcsolódást biztosító evolvens profil helyett a foglábgörbe származtatott hurkolt evolvense vagy epicikloisa található, és az evolvens profilnak nem szabad a foglábgörbével kapcsolódnia. Kijelenthetjük, tehát, hogy a kapcsolódás akkor megfelelő, amennyiben az ellenkerék fejköre a kapcsolószakaszt az adott kerék talpköri és alapköri pontja által meghatározott szakaszon kívül metszi.

Első lépésként felvesszük az alapkörök kapcsolóegyenest érintő, T_1 és T_2 pontjait. A továbbiakban felvesszük a fejkörök és a kapcsolóvonal A_1 és A_2 metszéspontjait. A **3. ábra** alapján felírhatók a következő összefüggések:

$$T_1A_1 = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} \tag{2}$$

$$T_2A_2 = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} \tag{3}$$

$$T_1\,T_2 = a_w \cdot sin\,\alpha \tag{4}$$

$$T_1\,A_2 = T_1\,T_2 - T_2\,A_2 \tag{5}$$

$$T_2\,A_1 = T_1\,T_2 - T_1\,A_1 \tag{6}$$

$$A_1\,A_2 = T_1\,T_2 - T_1\,A_2 - T_2\,A_1 \tag{7}$$

Felvesszük a P pontot, amely a kapcsolóvonal és a gördülőkör hármas metszéspontja, majd a **5. ábrá**t megfigyelve, felírhatjuk az alábbi egyenleteket:

$$OT = \frac{m \cdot z}{2} \cdot cos\,\alpha \tag{8}$$

$$LP = (h_0 - \xi + c_0 - \delta) \cdot m \tag{9}$$

$$PB = \frac{LP}{sin\,\alpha} \tag{10}$$

$$BT = PT - PB = OT \cdot tg\,\alpha - PB \tag{11}$$

$$r_t = \sqrt{BT^2 + OT^2} \tag{12}$$

A fentiekből következik, hogy a távolság a talpkörök és a fejkörök által a kapcsolóvonalon kimetszett pontok és az alapkörök érintési pontjai között:

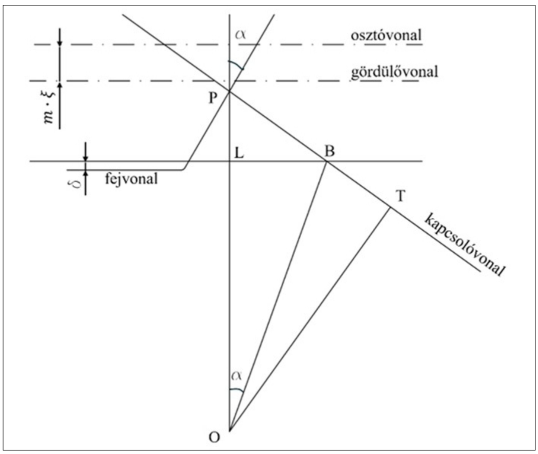
$$B_1T_1 = \sqrt{r_{t1}^2 - r_{b1}^2} \tag{13}$$

$$B_2T_2 = \sqrt{r_{t2}^2 - r_{b2}^2} \tag{14}$$

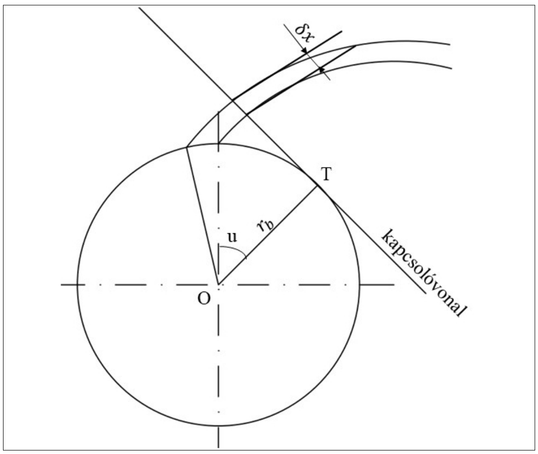
Az alapkörök érintési pontjai, valamint a talpkörök és a fejkörök metszéspontjai jelölik ki a valóságosan működő kapcsolószakaszt. A kapcsolódás akkor jó, ha az ellenkerék fejköre a kapcsolószakaszt az adott kerék talpköri és alapköri pontja által meghatározott szakaszon kívül metszi, azaz

$$T_1\,A_2 \geq T_1\,B_1 \text{ és } T_2\,A_1 \geq T_2\,B_2 \tag{15}$$

Az új modell felírásához a csúszást két, egymástól véges távolságra lévő kapcsolódási pont távolságának megfelelő $\Delta\ell_1$ és $\Delta\ell_2$ evolvensívhoszszak különbségeként definiáltam. Az evolvensek ívhosszainak kiszámításához az (16) és (17) összefüggéseket használtam fel. Az evolvensívhosszak felírásához az evolvenst generáló egyenes alapkörön való legördülésének megfelelő központi szöget kell felhasználnunk, vagyis egy u paramétert. Az u szögelfordulás alatt a generáló egyenes által érintett körívhossza megegyezik az r_b sugarú alapkör és az u szögelfordulás szorzatával. Az evolvenst generáló egyenes az alapkörhöz képest síkmozgást végez, amelynek pillanatnyi pólusa az érintési pont, vagyis egy adott lefejtési helyzetben az evolvens görbületi sugarát pontosan az $r_b u$ hosszúságú szakasz adja meg, így az evolvensgörbe elemi ívhossza $d\ell = r_b u\, du$. Ezzel kifejezhető két, véges u szögelfordulás-értéknek megfelelő lefejtett evolvensívhossz (**6. ábra**):



5. ábra. *A talpkörök sugarainak kiszámítása*



6. ábra. *Az evolvensívhossz kiszámítása*

$$\Delta\ell_1 = \int_{u_1}^{u_2} r_{b1} \cdot u \cdot du = \frac{r_{b1} \cdot (u_2^2 - u_1^2)}{2} \tag{16}$$

$$\Delta\ell_2 = -\int_{u'_1}^{u'_2} r_{b2} \cdot u \cdot du = \frac{r_{b2} \cdot ({u'_1}^2 - {u'_2}^2)}{2} \tag{17}$$

A relatív csúszás értékét megkaphatjuk, ha az evolvensívhosszak különbségét a kisebbik evolvensívhosszhoz viszonyítjuk, amely esetünkben a hajtókerékhez tartozik.

$$\chi = \frac{\Delta\ell_1 - \Delta\ell_2}{\Delta\ell_1} \tag{18}$$

A véges legördüléseknek megfelelő evolvensívhosszak számítási függvényét az alábbi pszeudokód szerint írtam fel:

$<N> = 100$	a kapcsolóvonalon felvett pontok száma
$< \delta x > = \dfrac{A_1A_2}{N-1}$	a kapcsolóvonalon haladó kapcsolódási pont által megtett szakaszhossz
ciklus $<i> = <0>$-től $<N-2>$-ig	ciklusváltozó definiálása
$< u_1 > = \dfrac{T_1A_2 + változó1 \cdot \delta x}{r_{b1}}$	hajtókerék alsó paramétere
$< u_2 > = \dfrac{T_1A_2 + változó1 \cdot \delta x + \delta x}{r_{b1}}$	hajtókerék felső paramétere
$< u'_1 > = \dfrac{T_1T_1 - (T_1A_2 + változó1 \cdot \delta x)}{r_{b2}}$	hajtott kerék alsó paramétere
$< u'_2 > = \dfrac{T_1T_1 - (T_1A_2 + változó1 \cdot \delta x + \delta x)}{r_{b2}}$	hajtott kerék felső paramétere
$< dl_1 > = \dfrac{r_{b1} \cdot (u_2^2 - u_1^2)}{2}$	hajtó keréken érintkezett ív hossza
$< dl_2 > = \dfrac{r_{b2} \cdot ({u'_1}^2 - {u'_2}^2)}{2}$	hajtott keréken érintkezett ív hossza
$< \chi > = \dfrac{dl_1 - dl_2}{dl_1}$	relatív csúszás értéke
$a_{i,0} = i \cdot \delta x$	kimenet első oszlopa, a kapcsolóvonalon megtett szakasz hossza
$a_{i,1} = \chi$	kimenet második oszlopa, a relatív csúszás értéke

ciklus vége

térítsd vissza a-t

A kód szerint megkaptam a relatív csúszás modelljét elemi fogazatra. Ezt követően meg akartam vizsgálni a modell felhasználását általános fogazatú evolvens fogaskerékhajtásokra. Ennek érdekében kiszámítottam a lehető legnagyobb és legkisebb profileltolás értékét általánosan, a szakirodalomban ismert módon, majd azt az általunk választott fogszámokra vonatkoztattuk. A maximális profileltolást az evolvens trigonometria második alaptörvényéből számítottam ki, a minimális profileltolást a léccel való fogazás ismert geometriai modelljéből, [3].

2.1. Számszerű kiértékelések

A tanulmány következő részét a modellek numerikus kiértékelése adja. A matematikai modelleket MathCad környezetbe helyezve, egy meghatározott fogaskerékhajtásra alkalmaztam azokat, amelynek a paraméterei az 1. táblázatban láthatók. Azért választottam a MathCad környezetet, mert az lehetővé tette a számítások egyszerű ellenőrzését, illetve a grafikonok megalkotását.

Először, a (2)–(14) összefüggéseket alkalmazva kiszámítottam a talpkörök sugarának a hosszát, az 1. táblázatban meghatározott értékeket figyelembe véve, illetve a B_1, B_2 pontok helyzetét. Esetünkben, mivel az egyszerűsítésre törekszünk, nem számolunk profileltolással, tehát a fajlagos fogfejhézag h_0 = 1 mm, a fajlagos foglábhézag c_0 = 0,25 mm, fajlagos profileltolás ξ = 0 mm és a fogtőgörbe magassága δ = 0,15 mm. Az egyenleteket alkalmazva a hajtó- és hajtott kerekekre, kapjuk, hogy a hajtókerék talpkörének a sugara r_{t1} = 31,97 mm, és a hajtott kerék talpkörének a sugara r_{t2} = 64,73 mm.

Tehát, mivel az A_1T_2 = 14.31 mm, A_1T_1 = 1,23 mm, illetve A_3T_1 = 1,70 mm, B_2T_2 = 10,39 mm, ebből következik, hogy a talpkörök által kimetszett pontok a fejkörök és az alapkörök által kimetszett pontok

1. táblázat. *A fogaskerekek paraméterei*

Megnevezés	Jelölés	Érték
Modul [-]	m	4
Kapcsolószög [rad]	a	π/9
Hajtókerék fogszáma [-]	z_1	17
Hajtott kerék fogszáma [-]	z_2	34
Hajtókerék osztókörsugara [mm]	r_{w1}	34
Hajtott kerék osztókörsugara [mm]	r_{w2}	68
Hajtókerék lábkörsugara [mm]	r_{f1}	29
Hajtott kerék lábsugara [mm]	r_{f2}	163
Hajtókerék fejkörsugara [mm]	r_{a1}	38
Hajtott kerék fejkörsugara [mm]	r_{a2}	72
Hajtókerék alapkörsugara [mm]	r_{a1}	31.94
Hajtott kerék alapkörsugara [mm]	r_{a2}	63.89
Fogmagasság [mm]	h	9
Lábhézag [mm]	c	1
Tengelytáv [mm]	a_w	102

közé esnek, vagyis B_1 pont a T_1 és A_2, illetve a B_2 pont a T_2 és A_1 között helyezkedik el. Következtetésként azt mondhatjuk, hogy a vizsgált hajtás helyesen kapcsolódik, tehát nem igényel újraméretezést.

A következőkben a Szeniczei-féle matematikai megoldást vittem át a MathCad környezetébe, annak érdekében, hogy a következőkben könnyebben összehasonlíthassam az általam javasolt modellel a kapott eredményeket. Ezt követően a saját matematikai modellemet felhasználva számoltam ki a relatív csúszást a fogak között. Megvizsgáltam a választott fogaskerékhajtás minimális és maximális profileltolásának értékét (**2. táblázat**) annak érdekében, hogy megvizsgáljam, általános fogazatra hogyan viselkednek a modellek.

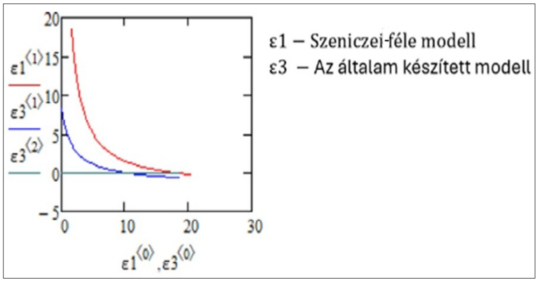
Látható, hogy a hajtott keréken negatív és pozitív irányú profileltolás is megengedett, amíg a hajtókeréken csak pozitív. A megengedett tartományokból két-két értéket választottam profileltolásként, így négy esetet állítottam fel általános fogazásra vonatkozólag (**3. táblázat**), amelyekre vizsgáltam a modell viselkedését. A profileltolás szerint újraszámoltam a fogaskerékhajtás paramétereit, illetve a relatív csúszást mind a Szeniczei-féle modell által, mind az általam generált modell alapján.

2. táblázat. *A profileltolások határai a választott fogszámokra*

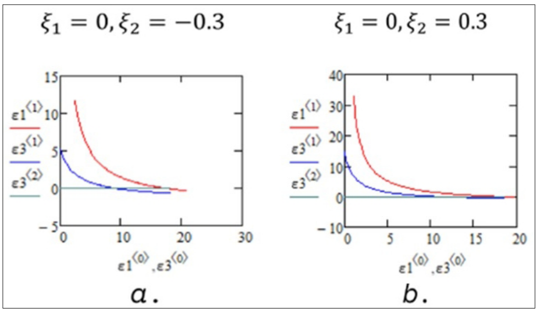
Fogszám	Minimális profileltolás	Maximális profileltolás
17	0	0,83
34	-0,98	1,71

3. táblázat. *A vizsgált profileltolások*

ξ_1	ξ_2
0	−0,3
0	0,3
0,3	0
0,5	0



7. ábra. *A relatív csúszást leíró modellek elemi fogazat esetén*



8. ábra. *Relatív csúszást leíró modellek, hajtott keréken végzett profileltolással a.) negatív profileltolás b.) pozitív profileltolás*

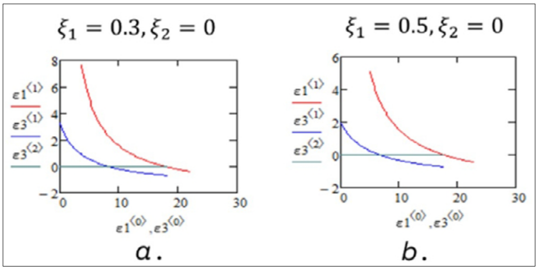
3. A kutatási eredmények tárgyalása

Az **7. ábra** szemlélteti a kapott eredményeket elemi fogazat esetén. A kapott függvények hiperbolák, ahogy azt vártuk. A két relatív csúszásfüggvény által kirajzolt hiperbola között azonban világosan látható különbségek vannak. Bár mindkettő azt mutatja, hogy ahogy haladunk előre a kapcsolóvonalon, a fogaskerekek közötti relatív csúszás rohamosan csökken, a kezdőpontjuk és a pillanat, amikor elérik a zéruspontot, jelentősen eltér. A Szeniczei-féle megoldás szerint a relatív csúszás kezdeti értéke meglehetősen nagyobb, szinte duplájának mondható, mint az általam felállított modellben, illetve a zéruspontot is a kapcsolóvonal egy távolabbi pontjában éri el. Az értékek közötti különbségek, bár lehet, nem tűnnek jelentősnek, mégis számottevőek lehetnek a fogfelületek meghibásodásánál, ahol, ne felejtsük el, a pár mikrométer nagyságú szennyeződések is, főképp hosszú távon, problémát tudnak okozni.

Amennyiben profileltolást alkalmazunk a hajtott keréken, szemmel láthatóan a görbék ellaposodnak, főképp a pozitív profileltolás esetén (**8. ábra**). A két modellt ábrázoló görbe hasonlóan viselkedik, amennyiben az elemi fogazatnál kapott eredményhez hasonlítjuk őket. A negatív profileltolás esetén mindkét görbénél csökkent a kezdeti relatív csúszás értéke, viszont a zéruspontot közel ugyanabban a pontban érik el. A pozitív profileltolásnál mindkét görbe magasabb relatív csúszásértékről indul, bár a Szeniczei-féle megoldást szemléltető hiperbolánál az elemi értékhez viszonyítva sokkal jobban megnőtt ez az érték, és hamarabb éri el a zéruspontot, mint az előzőekben. A lényegi különbség a két görbe között még mindig fennáll: az általam készített modell szerint a relatív csúszás értéke, főképp a kezdeti pillanatban, jelentősen kisebb, és a kapcsolóvonalon hamarabb eléri a nulla csúszás pillanatát.

A hajtókeréken végzett profileltolás esetén, mindkét esetben, csökken a relatív csúszás az elemi fogazathoz viszonyítva, bár a Szeniczei-féle modell esetében közel kétszer annyit csökken, mint az általam felállított modell esetén (9. ábra). A Szeniczei-féle modellt megfigyelve, továbbá, nem tűnik úgy, hogy a zéruspillanat elérésénél történne változás az elemi fogazathoz viszonyítva, amíg az általam felállított megoldás esetében a nulla csúszás pillanata a hajtókerék pozitív irányú profileltolásával hamarabb elérhető.

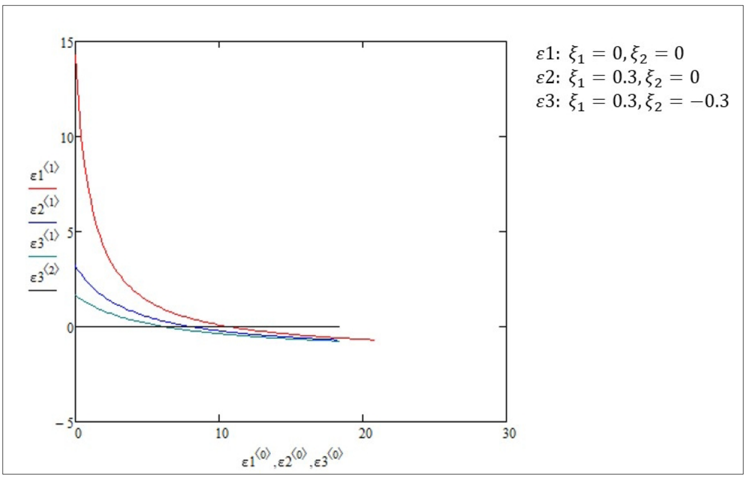
A 10. ábra szemlélteti az általam javasolt modellt különböző profileltolások esetén, amely rávilágít arra, hogy a relatív csúszás miképpen változik a profileltolások függvényében. Látható, hogy a profileltolások növelésével a hiperbola egyre jobban ellaposodik. A modell szerint a relatív csúszás értékét jelentősen lecsökkenthetjük, amennyiben mindkét fogaskeréken profileltolást végzünk. Az ábra szerint ekkor a relatív csúszás értéke kevesebb mint egyharmada az elemi fogazat esetén jelen lévő relatív csúszásnak. A zéruspontot szintén hamarabb elérjük a nagyobb profileltolás esetén. Ugyanakkor, megfigyelhető, hogy a görbék a zéruspont elérése után nem egy újabb hiperbolát követnek, csaknem összeérnek. Ez arra enged következtetni, hogy a javasolt modell további, aprólékosabb, sajátos esetek vizsgálatát is igénybe vevő matematikai elemzést kíván.



9. ábra. *A relatív csúszást leíró modellek, hajtókeréken végzett profileltolás esetén a.) A profileltolás 0.3 mm b.) A profileltolás 0.5 mm*

4. Következtetések

Az eredmények kiértékelése alapján elmondhatjuk, hogy az egzakt modell szerint a relatív csúszás értéke kisebb, mint azt az eddig ismert modell alapján tudtuk, illetve a nulla csúszás pillanatát is hamarabb elérjük. Továbbá, észrevehetjük, hogy a modellek hasonlóan viselkednek elemi, illetve általános fogazat esetén, különböző profileltolásoknál, így azt mondhatjuk, hogy a evolvens fogaskerékpár csúszásának pontos modellje mind elemi, mind általános fogazatú fogaskerékhajtásokra is fennáll. A Szeniczei-féle modell és az általam javasolt modell között az a lényeges matematikai különbség, hogy a klasszikus (Szeniczei)-féle matematikai modellben a γ_1, illetve γ_2 szögelfordulások az áttételi arányt kielégítik, azaz $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$, így a csúszást pillanatnyi határértékként is lehet értelmezni, azaz $\chi = \frac{\rho_1 - i_{12}\,\rho_2}{\rho_1} = 1 - i_{12}\frac{\rho_2}{\rho_1}$, ahol már csak az áttételi arány és a pillanatnyi érintkezésnek megfelelő profil-görbületi sugarak befolyásolják a csúszást,



10. ábra. *A javasolt relatív csúszást leíró modell különböző profileltolásokra* az általam javasolt modell a kapcsolódási pont útját követi végig a valós kapcsolószakaszon, és diszkrét időintervallumoknak megfelelő, relatív egymást érintő szakaszok közötti különbségek arányát adja vissza. Figyelembe véve, hogy a felületek mikrogeometriai, tehát valós érintkezésének módja inkább a véges, mint elemi elmozdulásokra értelmezhető, vélem, hogy az általam levezetett modell megfogalmazása megfelelő. Úgy gondolom, hogy a továbbiakban fontos lenne megvizsgálni, hogy amennyiben az új eredményeket felhasználjuk a fogaskerékhajtások méretezésénél, milyen eredményeket kapunk azok működésével és élettartamával kapcsolatban, amely gépelemek tárgyú kísérletsorozatot igényel. A módszer további kiterjeszthetőségének látom a lehetőségét, amennyiben a fogaskerekek közötti relatív csúszást pontosan felírhatnánk nemcsak evolvens profilokra, hanem egyéb fogprofilokra is, mint például a koszinusz- vagy a szinoidprofilú fogaskerekek esetén.

Szakirodalmi hivatkozások

[1] Vidéki E.: *Fogaskerekek*. „Pátria” Irodalmi Vállalat és Nyomdaipari Rt. nyomása, Budapest, 1912.

[2] Diker J. I.: Evolventnije zaceplenyije sz uprjamimi zubcami. Organmetal, Moszkva, 1935.

[3] Szeniczei L. *Az általános fogazás.* Királyi Magyar Egyetemi Nyomda, Budapest, 1941.

[4] Bolotovsky I. A., Bolotovskaya T. P., Bocharov G. S., Guryev V. I., Kurlov B. A., Merkuryev I. A., Smirnov V. E.: *Spravochnik po geometricheskomu raschotuevolventnih zubchatih i chervyachnih peredach*. Mashinostroyenie, Moszkva, 1963.

[5] Gavrilenko V. A.: *Osznovi teoriji evolventnoj zubcsatoj peredacsi.* Masinosztrojenie, Moszkva, 1966.

[6] Botka I.: *Fogaskerék-méretezés kiegyenlített kontakt-hőmérsékletre*. Gép, 4/11. (1964) 425–430.

[7] Tomori Z.: *A relatív csúszást leíró modellek, hajtó keréken végzett profileltolás esetén*. PhD-értekezés, 2019. (letöltve: 2024. 03. 28.) http://midra.uni-miskolc.hu/document/32638/29328.pdf

[8] Erney Gy.: *Fogaskerekek*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest. 1983.

[9] Alfredsson B.: *A Study on Contact Fatigue Mechanisms.* Doctoral Thesis no. 44. Department of Solid Mechanics, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2000. (letöltve: 2024. 04. 02.) https://www.researchgate.net/publication/265867484_A_Study_on_Contact_Fatigue_Mechanisms