



# LEFEJTŐ CSIGAMARÓ MODELLEZÉSE EGYENES FOGÚ LÉCBŐL

## GEAR HOB BASE WORM MODELLING FROM A STRAIGHT TOOTHED GENERATING RACK

Hodgyai Norbert,<sup>1</sup> Mircea Viorel-Drăgoi,<sup>2</sup> Máté Márton<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Transilvania University of Braşov, Faculty of Technological Engineering and Industrial Management, Department of Manufacturing Engineering, [hodgyai@ms.sapientia.ro](mailto:hodgyai@ms.sapientia.ro)

<sup>2</sup> Transilvania University of Braşov, Faculty of Technological Engineering and Industrial Management, Department of Manufacturing Engineering, [dragoi.m@unitbv.ro](mailto:dragoi.m@unitbv.ro)

<sup>3</sup> Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Marosvásárhelyi Kar, Gépészmérnöki Tanszék, Marosvásárhely, Románia, [mmate@ms.sapientia.ro](mailto:mmate@ms.sapientia.ro)

### Abstract

The precision of a gear realized by hobbing is mainly influenced by the precision of the base worm, the adequate form of the rake face and the number of resharpenings. Gering theory states that the base worm of a gear hob must be of involute type. Despite of this, manufacturing technology often admits a convolute worm as gear hob base worm. Due to the rake face grinding technology, there appears a difference between the theoretical and the real surface. On the other hand, the profile modification of the cutting edges occurs due to the re-sharpening. As a result, the cutting edges cannot reproduce that initial basic worm surface from which the gear hob was derived. In our opinion, the computing of the generating surfaces of the basic worm is still an unsolved problem. This paper deals with the study of a worm derived from a straight toothed generating rack. The incidence of an involute worm and that developed from the generating rack is investigated.

**Keywords:** gear hob, profile error, base worm, machining, generating rack.

### Összefoglalás

A simító csigamaróval gyártott fogazat pontosságát főként a származtató csiga pontossága, a megfelelő homlokfelület kialakítása és az újraélezések száma határozza meg. A generáláselmélet szerint a csigamarót evolvens csigából származtatják, a gyakorlatban ennek ellenére nagyon gyakran használnak konvolut alapcsigát. A csigamaró homlokfelület-kialakítási technológiája eredményeként az elméleti és a gyakorlati felület között eltérés keletkezik. Az élek az utánélezések következtében torzulnak, így a csigamaró már nem adja vissza az elméleti alapcsigát, amelyből származtattuk. Véleményünk szerint a csigamaró-származtató alapcsiga típusmeghatározásának a kérdése még nyitott kutatási terület. Jelen dolgozatban a gyártóléccel generált csiga profilját tanulmányozzuk. A dolgozatban numerikusan vizsgáljuk, hogy az egyenes vágóélű származtató léccel lefejtett csigamaró alapcsigája megegyezik-e az elméletben tárgyalt evolvens alapcsigával.

**Kulcsszavak:** csigamaró, profilhiba, alapcsiga, gyártás, gyártóléc.

### 1. Bevezetés

A csigamaró a fogaskerékgyártás legtermelékenyebb szerszáma. A csigamarókat három fő csoportra oszthatjuk: nagyoló, félsimító és simító csigamarókra. A simító csigamarók monolit szer-

kezetűek, pontosságukat a szabvány [1] három osztályba sorolja, pontosság szerint csökkenő sorrendben, melyeket AAA, AA és A jelöléssel különböztet meg [2, 3]. Az újabb szabvány [4] 2020-ban jelent meg, amelyben a simító szerszámokat négy

kategóriába sorolják, amelyek pontosságuk szerint csökkenő sorrendben a következők: 4A, 3A, 2A és A.

A csigamarók pontosságát jelentősen befolyásolja a származtató csiga típusa és ennek pontos megmunkálása. A csigamaró hagyományos szerzőgépeken történő megmunkálásakor az elméleti evolvens alapcsiga helyett konvolut csigát használnak, mivel ez utóbbi gyártása egyszerűbb, és nagyobb termelékenységgel megvalósítható [5].

A csigamaró magas pontossági osztályának eléréséhez és a vágóélek éltartamának optimalizálása érdekében a monolit csigamarókat csavar-homlokfelülettel készítik [6]. A csavar-homlokfelület gyártására használt beállítás matematikai modelljének numerikus ellenőrzésekor alámetszést figyelhettünk meg [7, 8].

A dolgozatban numerikusan vizsgáljuk, hogy az egyenes vágóélű származtató léccel lefejtett csigamaró alapcsigája megegyezik-e az elméletben tárgyalt evolvens alapcsigával.

## 2. A matematikai modell felépítése

### 2.1. A geometriai modell felépítése

A generált csiga menetszárnnyfelülete a fogasléc (generáló lécc) fogárka által burkolt felület. A felületek és a csatolt koordináta-rendszerek kölcsönös helyzete az 1. ábrán látható. A csiga felületeinek származtatásához a generáló lécc fogarkát az  $O_2X_2Y_2Z_2$  koordináta-rendszerhez kötjük.

A csigához kötött koordináta-rendszer az  $O_1X_1Y_1Z_1$  rendszer, melynek kezdeti helyzetét az  $O_1^0X_1^0Y_1^0Z_1^0$  jelöli. A csiga  $O_1X_1$  tengelye a fogasléc haladási irányával a  $\lambda_0$  szöveget zárja, mely meg-

egyezik az osztóhengeri csavarvonal dőlésszögével, azért, hogy az osztóhengeren levő érintkezési pontban a csavarvonal érintője a lécc fogirányvonalával egybeessen. A kölcsönös mozgás során a csiga a saját,  $O_1X_1$  tengelye mentén  $p$  paraméterű csavarmozgást végez. Tengelye körüli elfordulásának szögét  $\varphi_1$ -gyel jelöljük. A származtató fogasléc fogárokfelületeinek generáló egyenesei kék színnel vannak kiemelve. A generáló lécc profil-szögét a szabványos  $\alpha_0 = 20^\circ$  értékre választjuk.

A csiga felületeinek kiszámításához föl kell írunk a fogasléc és a csiga koordináta-rendszerei közötti transzformációt, melynek egyenlete az,

$$\underline{r}_1 = \mathbf{M}_{11^0} \cdot \mathbf{M}_{1^0 2} \cdot \underline{r}_2 \quad (1)$$

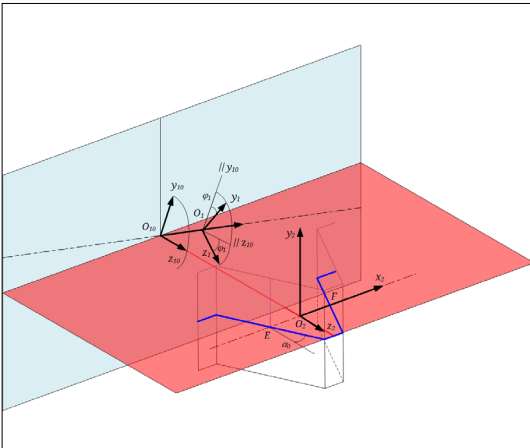
ahol

$$\mathbf{M}_{11^0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -p\varphi_1 \\ 0 & \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

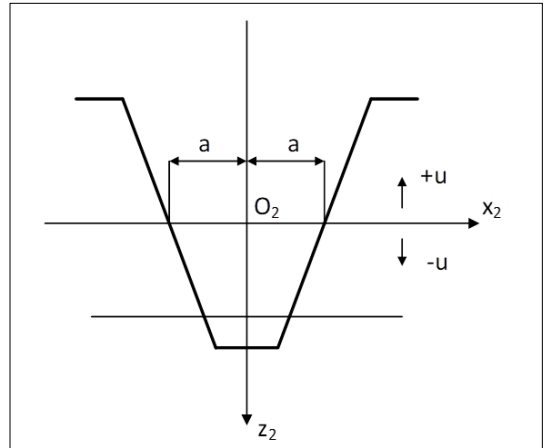
$$\mathbf{M}_{1^0 2} = \begin{pmatrix} \cos \lambda_0 & -\sin \lambda_0 & 0 & 0 \\ \sin \lambda_0 & \cos \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

A generáló lécc profilját a következő, parametrikus 2. ábrán adjuk meg:

$$\begin{cases} x_2(u, j) = j(a + u \operatorname{tg} \alpha_0) \\ y_2(v) = v \\ z_2(u) = -u \end{cases}, \quad a = \frac{\pi m}{4} \quad (4)$$



1. ábra. A geometriai modell felépítése



2. ábra. A generáló profil ábrázolása

A  $j$  paramétert a jobb, illetve a bal oldali származtató felület felírásának összevonásáért alkalmazzuk: a bal oldali felület esetére  $j = -1$ , míg a jobb oldalra  $j = +1$ . A jobb vagy bal oldalt a **2. ábrán** a  $z_2$  tengely irányításával ellentétesen, azaz a csiga felé nézve állapítjuk meg.

## 2.2 A kapcsolódási egyenlet megoldása

A kapcsolódási egyenletet a [Litvin] szerint vektoralakban írjuk fel, és a léchez kötött  $S_2$  koordináta-rendszerben oldjuk meg:

$$\mathbf{v}_2^{(12)} \cdot \mathbf{n}_2^{(2)} = 0 \quad (5)$$

A relatív sebességvektort a

$$\mathbf{v}_2^{(12)} = \boldsymbol{\omega}_{o_2}^{(1)} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{A}) + p\omega_1 \mathbf{i}_1 \quad (6)$$

egyenlettel fejezzük ki, ahol

$$\underline{\boldsymbol{\omega}_{o_2}^{(1)}} = \begin{pmatrix} \cos \lambda_0 \\ -\sin \lambda_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

a csiga szögsebessége,

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} p\varphi_1 \cos \lambda_0 \\ -p\varphi_1 \sin \lambda_0 \\ -r_{10} \end{pmatrix} \quad (8)$$

pedig a csigához kötött rendszer origójának helyvektora a léchez kötött rendszerben. A behelyettesítések és a számítások elvégzése után a relatív sebességvektor a következő alakot ölti:

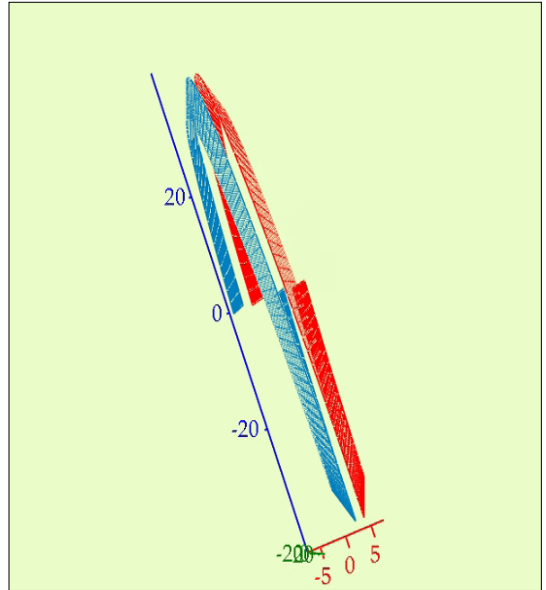
$$\mathbf{v}_2^{(12)} = \begin{pmatrix} -(r_{10} - u) \sin \lambda_0 + p \cos \lambda_0 \\ -(r_{10} - u) \cos \lambda_0 - p \sin \lambda_0 \\ j(a + u \operatorname{tg} \alpha_0) \sin \lambda_0 + v \cos \lambda_0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

A normális vektor alakja

$$\mathbf{n}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} j \cos \alpha_0 \\ 0 \\ \sin \alpha_0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Behelyettesítvén a (9) és (10) vektorokat az (5) egyenletbe,  $\Phi(u, v) = 0$  skaláregyenlethez jutunk, melyből a következő paraméter-összefüggést állítjuk elő:

$$v(u) = -j \operatorname{tg} \lambda_0 \left( a + \frac{u}{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0} \right) \quad (11)$$



**3. ábra.** A csiga profiljának ábrázolása

A csiga felületének egyenleteit az (1) mátrixegyenlethez számoljuk ki, a (11) összefüggés bevezetésével:

$$\begin{cases} x_1(u, \varphi_1; j) = j \left( \frac{a}{\cos \alpha_0} + u \frac{\sin^2 \alpha_0 \cos^2 \lambda_0 + \sin^2 \lambda_0}{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \cos \lambda_0} \right) \\ y_1(u, \varphi_1; j) = -j u \frac{\sin \lambda_0}{\operatorname{tg} \alpha_0} \cos \varphi_1 + (r_{10} - u) \sin \varphi_1 \\ z_1(u, \varphi_1; j) = j u \frac{\sin \lambda_0}{\operatorname{tg} \alpha_0} \sin \varphi_1 + (r_{10} - u) \cos \varphi_1 \end{cases} \quad (12)$$

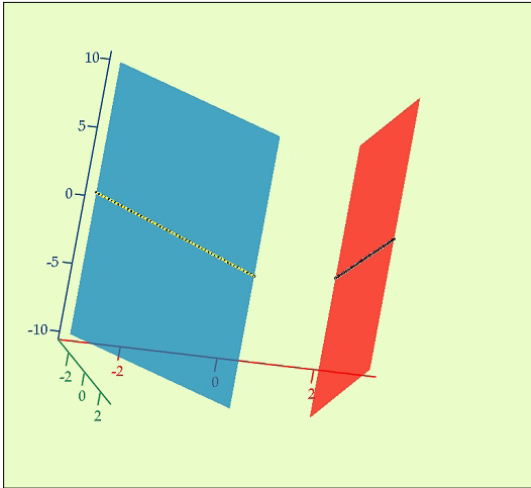
A csiga menetszárnyfelületeit MathCad-környezetben ábrázolva, a **3. ábrán** láthatjuk,  $m = 5$  mm-es modul és  $\lambda_0 = 2^\circ$  osztóhengericsavarvonal-dőlésszöggel.

## 3. A csiga profiljának vizsgálata

### 3.1. A kontaktgörbe meghatározása

A származtató lécz felületein a kontaktgörbe parametrikus egyenleteit megkapjuk, ha a (11) összefüggést a származtató felületek (4) egyenleteibe helyettesítjük:

$$\begin{cases} x_2(u, j) = j(a + \operatorname{tg} \alpha_0) \\ y_2(u, j) = -j \operatorname{tg} \alpha_0 \left( a + \frac{u}{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0} \right) \\ z_2(u, j) = -u \end{cases} \quad (13)$$



4. ábra. A csiga felületét generáló felületek és a kon-taktgörbék ábrázolása

### 3.2. A csiga homloketszeti profiljának meghatározása

A csiga egyenleteit az egyszerűbb számítás érdekében hengerkoordinátákba vezetjük át.

A csiga parametrikus egyenleteinek egyszerűsítése érdekében bevezetjük az alábbi jelöléseket:

$$a_x = \frac{a}{\cos \lambda_0}; \quad b_x = \frac{\sin^2 \alpha_0 \cos^2 \lambda_0 + \sin^2 \lambda_0}{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \cos \lambda_0}; \quad (14)$$

Ezzel a csiga (12) parametrikus egyenletei az alábbi, egyszerűsített alakban írhatók fel:

$$\begin{cases} x_1(u, \varphi_1; j) = j(a_x + ub_x) - p\varphi_1 \\ y_1(u, \varphi_1; j) = -j \frac{\sin \lambda_0}{\tan \alpha_0} u \cos \varphi_1 + (r_{10} - u) \sin \varphi_1 \\ z_1(u, \varphi_1; j) = j \frac{\sin \lambda_0}{\tan \alpha_0} u \sin \varphi_1 + (r_{10} - u) \cos \varphi_1 \end{cases} \quad (15)$$

A csiga parametrikus egyenletei hengerkoordinátákban a következő alakot öltik:

$$\begin{cases} \rho(u) = (y_1^2 + z_1^2)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\sin^2 \lambda_0}{\tan^2 \alpha_0} u^2 + (r_{10} - u)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \theta(u) = \arctg \frac{z_1}{y_1} = -\arctg \left( \varphi_1 + \arctg \left( \frac{r_{10} - u}{u} \frac{\tan \alpha_0}{\sin \lambda_0} \right) \right) \\ x_1(u, \varphi_1; j) = j(a_x + ub_x) - p\varphi_1 \end{cases} \quad (16)$$

A csiga tengelyre merőleges szelvényét megkapjuk, ha a menetszárnny felületeit elmetsszük egy,

a tengelyére merőleges síkkal, legyen ez, a minél egyszerűbb eredmények elérése érdekében, az  $y_1 O_1 z_1$  sík:

$$x_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = j \frac{a_x + ub_x}{p} \quad (17)$$

A  $\varphi_1$  (17) függvényének a (16) egyenletekbe való helyettesítése és a számítások elvégzése után megkapjuk a keresett szelvény poláregyenleteit:

$$\begin{cases} \rho(u) = \left( \frac{\sin^2 \lambda_0}{\tan^2 \alpha_0} u^2 + (r_{10} - u)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \theta(u) = - \left( j \frac{a_x + ub_x}{p} + \arctg \left( \frac{r_{10} - u}{u} \frac{\tan \alpha_0}{\sin \lambda_0} \right) \right) \end{cases} \quad (18)$$

A (18) parametrikus egyenletek vizsgálata rávet arra, hogy a léccel kölcsönös burkolásban levő csiga nem lehet Arkhimédész-féle csiga, mivel egyrészt a  $\theta(u)$  függvény  $u(\theta)$  inverzét nem lehet kifejezni explicit módon, és ha lehetne, akkor sem lenne lineáris. Másrészt, a  $\rho(\theta)$  függvény  $u$ -ban négyzetes, így kizárt, hogy a  $\rho(\theta)$  polársugárfüggvény a  $\theta$  polárszögváltozóban lineáris legyen. Következésképpen feltételezünk, miszerint a burkolt csiga nem Arkhimédész-típusú, bizonyítottnak.

### 3.3. A csiga alkotóegyenesei és a csiga forgástengelye közötti viszonyok vizsgálata

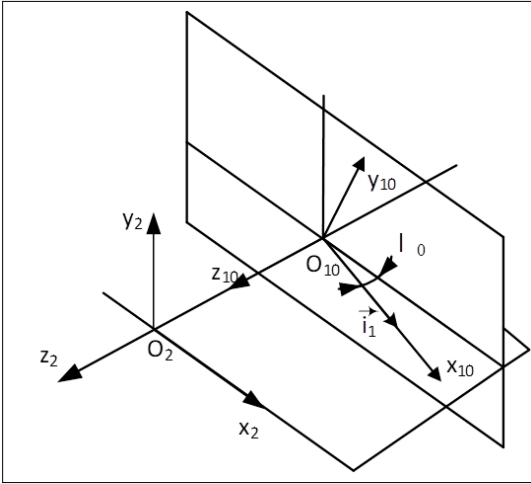
Az evolvens csiga ismert tulajdonsága, hogy két olyan egyenes csavarmozgásából generáljuk a menetszárnny felületét, melyek a csiga  $r_{1b}$  sugarú alaphengerét érintő két, párhuzamos síkba illeszkednek. Az igazoló számítást a származtató léchez kötött,  $S_2$  koordináta-rendszerben végezzük el. A (13) kifejezésekkel meghatározott egyenesek irányítványzóit  $u$  szerinti deriválással kapjuk:

$$\dot{\underline{r}}_2 = \begin{pmatrix} j \tan \alpha_0 \\ -j \left( \frac{\tan \lambda_0}{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0} \right) \\ -1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

A csigatengely irányegységvektora az  $S_2$  koordináta-rendszerben (5. ábra):

$$\underline{i}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos \lambda_0 \\ -\sin \lambda_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

A közös merőleges irányvektorát a (19) és (20) vektorszorzataként kapjuk:



5. ábra. A csigatengely egységvektorának ábrázolása

$$\underline{w} = [\tilde{\mathbf{i}}_2^{(1)}] \dot{\underline{r}}_2 = \begin{pmatrix} \sin \lambda_0 \\ \cos \lambda_0 \\ -j \frac{\sin \lambda_0}{\operatorname{tg} \alpha_0} \end{pmatrix} \quad (21)$$

A  $\underline{w}$  vektor hosszúsága:

$$|\underline{w}| = \sqrt{\sin^2 \lambda_0 + \cos^2 \lambda_0 + \frac{\sin^2 \lambda_0}{\operatorname{tg}^2 \alpha_0}} = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha_0 + \sin^2 \lambda_0}}{\operatorname{tg} \alpha_0} \quad (22)$$

A közös normális irány egységvektorainak koordinátái az  $S_2$  rendszerben, a (21)-ből és (22)-ből azonnal következnek:

$$\begin{aligned} w_{ev2} &= \frac{\sin \lambda_0 \operatorname{tg} \alpha_0}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha_0 + \sin^2 \lambda_0}} \\ w_{ev2} &= \frac{\cos \lambda_0 \operatorname{tg} \alpha_0}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha_0 + \sin^2 \lambda_0}} \\ w_{ev2} &= -j \frac{\sin \lambda_0}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha_0 + \sin^2 \lambda_0}} \end{aligned} \quad (23)$$

Továbbá szükséges a két kitérő egyenes egy-egy pontját fölvenni. A csiga tengelyén az origót veszünk fel, melynek koordinátái az  $S_2$  -ben

$$O_1 = (0 \quad 0 \quad r_{10}) \quad (24)$$

A két kapcsolódó egyenesen az  $u=0$  értékre megkapjuk az  $O_2x_2$  tengelyre illeszkedő pontokat:

$$\underline{A}_j = \underline{r}_2(0) = \begin{pmatrix} ja \\ -ja \operatorname{tg} \lambda_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

A (24) és (25) képletekkel megadott pontokra a

$$\underline{P}_j = \overrightarrow{O_1 A_j} = \begin{pmatrix} -ja \\ ja \operatorname{tg} \lambda_0 \\ r_{10} \end{pmatrix} \quad (26)$$

vektorokat illesztjük, melyeknek a  $\underline{w}$  vektor egységvektorával való skalárszorzatuk adja meg a két érintkező egyenes és a csiga tengelye közötti távolságot. A (23) és (26) képletek segítségével, a távolságok értéke

$$d_j = \left| \underline{P}_j \cdot \frac{\underline{w}}{|\underline{w}|} \right| = \frac{r_{10} \sin \lambda_0}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha_0 + \sin^2 \lambda_0}} \quad (27)$$

A szakirodalomból ismert, hogy a fogasléc normál és homlokmetszeti kapcsolószögei közötti összefüggés jelesen  $\operatorname{tg} \alpha_{0r} = \operatorname{tg} \alpha_0 / \cos \beta$ , innen pedig

$$\cos \alpha_{0r} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{0r}}} = \frac{\cos \beta}{\sqrt{\cos^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \alpha_{0r}}} \quad (28)$$

Tudván, hogy a csiga egy annyira dőlt fogú fogaskerékkel ekvivalens, melynek fogszáma a csiga bekezdéseinek számával egyenlő, dőlésszöge pedig az osztóhengericsavarronal-dőlésszög pót-szöge, azaz  $\beta = \pi/2 - \lambda_0$ , a (28) képlet a

$$\cos \alpha_{0r} = \frac{\sin \lambda_0}{\sqrt{\cos^2 \lambda_0 + \operatorname{tg}^2 \alpha_{0r}}} \quad (29)$$

alakot ölti. A (27) és (29) képletek együttes vizsgálatából kikövetkeztethető, hogy a csiga és a generáló fogasléc érintkezési egyeneseinek a csiga tengelyétől való távolságai egyenlők, és egyenlők a jól ismert  $r_{10} \cos \alpha_0$  értékkel, ami, az evolvens trigonometria első alapösszefüggése [Szeniczai] értelmében, az alapkör sugarával egyenlő.

A fenti bizonyítás alapján kijelenthető, hogy az egyenes fogú léccel kapcsolódó csiga evolvens csiga.

#### 4. Következtetések

A gyártóléc által generált csiga profiljának vizsgálata során megállapítottuk, hogy a csiga evolvens profilú.

A csigát generáló síkfelületeken egyenes kontaktusgörbéket találtunk.

#### Szakirodalmi hivatkozások

- [1] [DIN 3968] Tolerances for Single-start Hobs for Involute Spur Gears.

- [2] Hollanda D.: *Aschiere si scule*. Reprografia I.I.S. Tg. Mures, 1982.
- [3] Máté M.: *Hengeres fogaskerekek gyártószerszámai*. MTF 12. Erdélyi Múzeum-Egyesület, Kolozsvár, 2016.  
<https://doi.org/10.36242/mtf-12>
- [4] [ISO 4468 : 2020] Gear hobs – Accuracy Requirements.
- [5] Radzevich, S. P.: *Gear Cutting Tools: Fundamentals of Design and Computation*. CRC Press; 1<sup>st</sup> edition, 2010.
- [6] Radzevich, S. P.: *On the Accuracy of Precision Involute Hobs: An Analytical Approach*. Journal of Manufacturing Processes, 9/2. (2007) 121–136.
- [7] Hodgyai N., Máté M., Tolvaly-R. F., Drăgoi M. V., *Peculiarities of the Grinding Process of a Gear Hob Helical Rake Face*. Acta Universitatis Sapientiae Electrical and Mechanical Engineering, 13. (2021) 39–51  
<https://doi.org/10.2478/auseme-2021-0004>.
- [8] Máté M., Tolvaly-R. F., Hodgyai N., Egyed-F. E.: *A csigamaró-homlokfelület köszörülésének valós modellje* („The Realistic Model of the Gear-Hob Rake face Grinding”) In: Barabás I. (szerk.) XXX. Nemzetközi Gépészeti Konferencia – OGÉT 2022, Kolozsvár. EMT, 73–79.