

A HAJTÓMŰ KINEMATIKAI ELEMZÉSE KÉNYSZEREGYENLETEK SEGÍTSÉGÉVEL

KINEMATICS ANALYSIS OF CRANK MECHANISM WITH CONSTRAINT EQUATIONS

Popa-Müller Izolda,¹ Papp István²

¹ Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem, Marosvásárhelyi Kar, Gépészmérnöki Tanszék, Marosvásárhely, Románia, ipmuller@ms.sapientia.ro

² EME, Marosvásárhely, Románia, pappistvan1944@yahoo.com

Abstract

The equation system, described for kinematic pairs of Crank mechanism, consist of general constraint equations. For Crank mechanism, the position of the center of gravity for the components, and the directions of the main axis of inertia can be determined for the entire kinematic cycle. To determine the positions, we use a coordinate system fixed to the center of gravity of the mechanism. The coordinates of the center of gravity of the members of the mechanism are always constant in relation to the geometric system attached to the component. The vector contour created in this way, defined by position vectors, must always be closed.

Keywords: constraints, kinematic pairs, constraint equations.

Összefoglalás

A hajtómű tagjainak kinematikai párjaira felírt egyenletrendszerek, általános érvényű kényszer egyenletekből tevődnek össze. A mechanizmust alkotó tagok súlypontjának helyzete és a tehetetlenségi főtengety irányai az egész kinematikai ciklusra meghatározhatók. A pozíciók meghatározására jelen esetben a gép törzséhez rögzített koordináta-rendszert használtunk. A mechanizmus tagjainak súlypont-koordinátái mindig állandók a tagokhoz rögzített geometriai rendszerhez viszonyítva. Az így alkotott vektorkontúr, melyeket helyzetvektorokkal határoztunk meg, mindig zárt kell, hogy legyen.

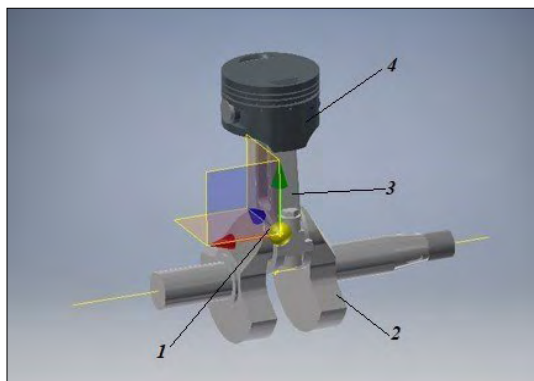
Kulcsszavak: kényszerek, kinematikai párok, kényszer egyenletek.

1. Hajtómű-mechanizmus

A hajtómű-mechanizmus (1. ábra) a következő összetevőkből áll:

- géptörzs (1);
- főtengety (2);
- hajtókar (3);
- dugattyú (4).

OXYZ a rögzített koordináta-rendszer, míg $G_i X_i Y_i Z_i, i \in \overline{1,4}$ rendre a géptörzs, a főtengety, a hajtókar, és a dugattyú központi tehetetlenségi főtengetyeinek rendszerei. A következőket *-gal jelölt $O_i X_i^* Y_i^* Z_i^*, i \in \overline{1,4}$, a hajtómű elemeihez az előbbi felsorolás szerint csatolt segédrendszerek.



1. ábra. Hajtómű 3D-modellje és súlypontjának láthatósága

A mechanizmus tagjainak súlypont-koordinátái mindig állandók a tagokhoz rögzített geometriai rendszerhez viszonyítva, így a vektorkontúr (2. ábra), amely helyzetvektorokkal van meghatározva, szükséges, hogy zárt legyen.

$$\vec{r}_{12} - \vec{r}_{21} + \vec{r}_{23} - \vec{r}_{32} + \vec{r}_{34} - \vec{r}_{43} + \vec{r}_{41} - \vec{r}_{14} = 0 \quad (1)$$

1.1. Géptörzs állandóinak meghatározása

A géptörzs súlypontjának helyvektora, a segédrendszerben, a következő:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \quad (2)$$

A géptörzs súlypontjában felvett tehetetlenségi főtengetelyrendszer tengelyeinek irányítványozói a $O_1 X_1^* Y_1^* Z_1^*$ segédrendszerben a következő mátrisszal fejezhető ki:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.999277 & 0 & 0 \\ 0 & 0.999097 & 0 \\ 0 & 0 & 0.99978 \end{pmatrix} \quad (3)$$

A felvett segédrendszer irányítványozóit, a géptörzs tehetetlenségi főtengetely koordinátarendszeréhez viszonyítva, a következőképpen jelöljük [1]:

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha_{1i}^0 & \cos \beta_{1i}^0 & \cos \gamma_{1i}^0 \\ \cos \alpha_{2i}^0 & \cos \beta_{2i}^0 & \cos \gamma_{2i}^0 \\ \cos \alpha_{3i}^0 & \cos \beta_{3i}^0 & \cos \gamma_{3i}^0 \end{pmatrix} = A_1^T \quad (4)$$

Az $\vec{r}_{12}$ helyzetvektor az O_{12}^* pont koordinátáit határozza meg a géptörzs súlypontjába helyezett segédrendszerhez viszonyítva:

$$\vec{r}_{12} = O_{12}^* - G_1 \quad (5)$$

Az $\vec{r}_{12i}$ helyzetvektor az O_{12}^* pont koordinátáit fejezi ki a géptörzs súlypontjába helyezett központi tehetetlenségi főtengetelyek koordinátarendszeréhez viszonyítva:

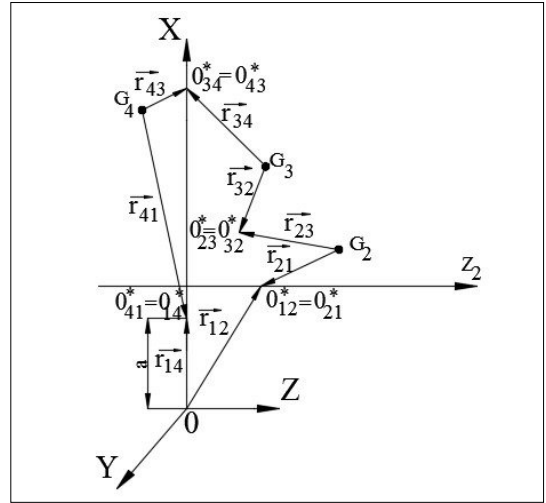
$$\vec{r}_{12i} = A_1^T \cdot \vec{r}_{12} \quad (6)$$

Az $\vec{r}_{14}$ helyzetvektor az O_{14}^* pont koordinátáit fejezi ki a géptörzs súlypontjába helyezett segédrendszerben:

$$\vec{r}_{14} = O_{14}^* - G_1 \quad (7)$$

A géptörzsen felvett O_{14}^* pont, amely egybeesik a géptörzsen felvett segédrendszer origójával, és rajta van a 4-es dugattyú tengelyvonalán:

$$O_{14}^* = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$



2. ábra. Hajtómű vektorkontúrja

1.2. A főtengetely állandóinak meghatározása

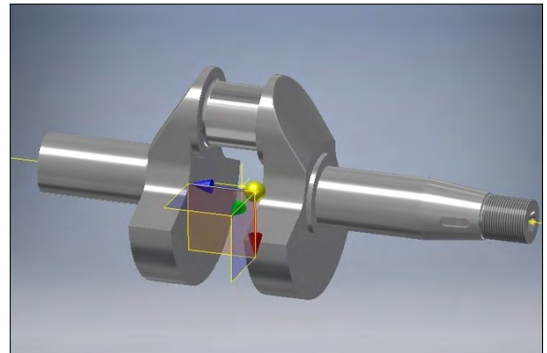
Az 4. ábrán látható Inventor-ablakból leolvashatók a főtengetely tehetetlenségi nyomatékai és súlypontjának koordinátái, a tengelyen felvett segédrendszerben.

A mechanizmus főtengetelyén (3. ábra) választott O_{21}^* pontjára felírható a G_2 súlypontba helyezett segédrendszerhez viszonyított helyzetvektor:

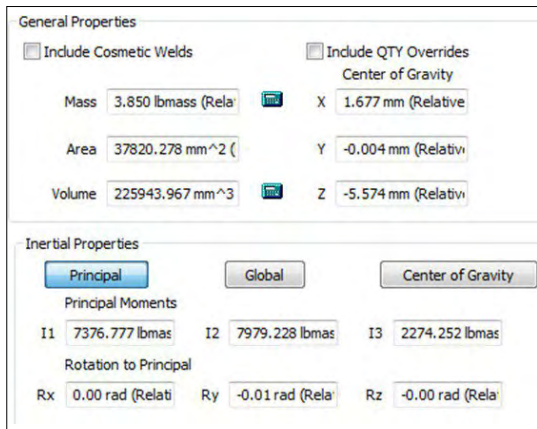
$$\vec{r}_{21} = O_{21}^* - G_2, \quad O_{21}^* = \begin{pmatrix} 0.03 \\ 0 \\ -0.0125 \end{pmatrix} \quad (9)$$

A tengely súlypontja, a főtengetelyen felvett segédrendszerhez viszonyítva (4. ábra):

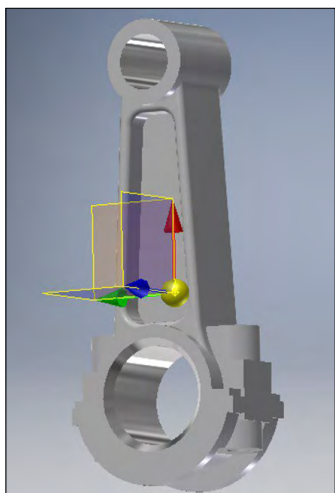
$$G_2 = \begin{pmatrix} 1.677 \\ -0.004 \\ -5.574 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \quad (10)$$



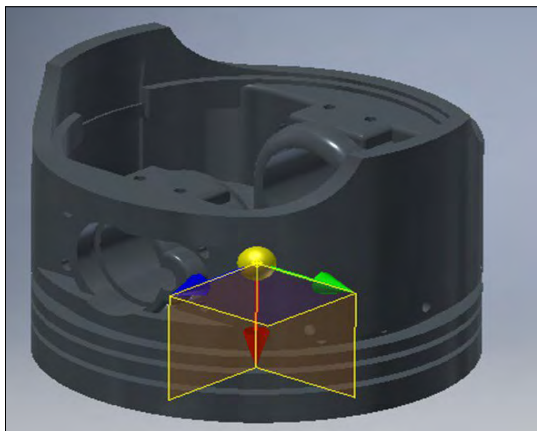
3. ábra. A főtengetely modellje és súlypontjának láthatósága



4. ábra. A főtengely tehetetlenségi és súlypontjának adatai Inventor-környezetben



5. ábra. A hajtókar modellje és súlypontjának láthatósága



6. ábra. A dugattyú modellje és súlypontjának láthatósága

A tehetetlenségi főtengelyek iránytényezői a (2) főtengelyen felvett segédrendszerhez viszonyítva:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.99997563 & 0 & 0 \\ 0 & -1.744444 \cdot 10^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

1.3. A hajtókar állandóinak meghatározása

A főtengelyhez kapcsolódó hajtókar (5. ábra) felső furatának tengelyvonalán felvett segédrendszerhez viszonyított súlypont koordinátái:

$$G_3 = \begin{pmatrix} -61.158 \\ -0.004 \\ -2.586 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \quad (12)$$

A hajtókar alsó furatának tengelyvonalán felvett O_{34}^* pont koordinátái a hajtókar segédrendszeréhez viszonyítva. A pont egybeesik a dugattyú csapján felvett O_{43}^* ponttal.

$$O_{34}^* = \begin{pmatrix} 89.3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \quad (13)$$

1.4. A dugattyú állandóinak meghatározása

A tehetetlenségi főtengelyek iránytényezői a dugattyú (6. ábra) felvett segédrendszeréhez viszonyítva:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0.99979172 & 0 & 0 \\ 0 & 0.99999998 & 0 \\ 0 & 0 & 0.99999945 \end{pmatrix} \quad (14)$$

A dugattyú csapjának tengelyvonalán felvett pont koordinátái működés közben egybeesnek a hajtókaron felvett ponttal.

$$O_{43}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3} \quad (15)$$

2. A kényszeregyenletek rendszerbe foglalása

A tagok helyzetét 37 pozícióban határoztuk meg. A mechanizmus vezető paramétere ψ_2^* , amely a főtengely segédrendszerének a rögzített rendszerhez viszonyított OZ tengely körüli elfordulása.

Ismerjük a tagok segédrendszereinek a tehetetlenségi főtengelyekkel alkotott iránytényezőit és forgásszögeit. [1, 2]

2.1. Térmechanizmusként tárgyalt hajtómű kényszeregyenletei:

A kényszeregyenletek száma a csukló fajtájától függ, forgócsukló esetén 5 kényszeregyenletünk van.

A géptörzs forgócsuklójára felírt kényszeregyenlet [3–5]:

$$x_{G_1} + x_{12} \cdot \alpha_{110} + y_{12} \cdot \alpha_{210} + z_{12} \cdot \alpha_{310} - x_{G_2} - x_{21} \cdot \alpha_{12}(\psi_2, \theta_2, \phi_2) +$$

$$-y_{21} \cdot \beta_{12}(\psi_2, \theta_2, \phi_2) - z_{21} \cdot \gamma_{12}(\psi_2, \theta_2) = 0$$

$$y_{G_1} + x_{12} \cdot \beta_{110} + y_{12} \cdot \beta_{210} + z_{12} \cdot \beta_{310} - y_{G_2} - x_{21} \cdot \alpha_{22}(\psi_2, \theta_2, \phi_2) - y_{21} \cdot \beta_{22}(\psi_2, \theta_2, \phi_2) +$$

$$-z_{21} \cdot \gamma_{22}(\psi_2, \theta_2) = 0$$

$$z_{G_1} + x_{12} \cdot \gamma_{110} + y_{12} \cdot \gamma_{210} + z_{12} \cdot \gamma_{310} - z_{G_2} - x_{21} \cdot \alpha_{32}(\psi_2, \theta_2, \phi_2) - y_{21} \cdot \beta_{32}(\psi_2, \theta_2, \phi_2)$$

$$-z_{21} \cdot \gamma_{32}(\psi_2, \theta_2) = 0$$

$$b_{131} - \left(\alpha_{12}(\psi_2, \theta_2, \phi_2) \cdot \gamma_{120} + \beta_{12}(\psi_2, \theta_2, \phi_2) \cdot \gamma_{220} + \gamma_{12}(\psi_2, \theta_2) \cdot \gamma_{320} \right) = 0$$

$$b_{231} - \left(\alpha_{22}(\psi_2, \theta_2, \phi_2) \cdot \gamma_{120} + \beta_{22}(\psi_2, \theta_2, \phi_2) \cdot \gamma_{220} + \gamma_{22}(\psi_2, \theta_2) \cdot \gamma_{320} \right) = 0$$

A főtengely forgócsuklójára felírt kényszeregyenlet:

$$x_{G_2} + x_{23} \cdot \alpha_{12}(\psi_2, \theta_2, \phi_2) + y_{23} \cdot \beta_{12}(\psi_2, \theta_2, \phi_2) + z_{23} \cdot \gamma_{12}(\psi_2, \theta_2) - x_{G_3} - (x_{32} \cdot \alpha_{13}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) +$$

$$+ y_{32} \cdot \beta_{13}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) + z_{32} \cdot \gamma_{13}(\psi_3, \theta_3)) = 0$$

$$y_{G_2} + x_{23} \cdot \alpha_{22}(\psi_2, \theta_2, \phi_2) + y_{23} \cdot \beta_{22}(\psi_2, \theta_2, \phi_2) + z_{23} \cdot \gamma_{22}(\psi_2, \theta_2) - y_{G_3} - (x_{32} \cdot \alpha_{23}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) +$$

$$+ y_{32} \cdot \beta_{23}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) + z_{32} \cdot \gamma_{23}(\psi_3, \theta_3)) = 0$$

$$z_{G_2} + x_{23} \cdot \alpha_{32}(\psi_2, \theta_2, \phi_2) + y_{23} \cdot \beta_{32}(\psi_2, \theta_2, \phi_2) + z_{23} \cdot \gamma_{32}(\psi_2, \theta_2) - z_{G_3} - (x_{32} \cdot \alpha_{33}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) +$$

$$+ y_{32} \cdot \beta_{33}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) + z_{32} \cdot \gamma_{33}(\psi_3, \theta_3)) = 0$$

$$(\alpha_{12}(\psi_2, \theta_2, \phi_2) \cdot \gamma_{120} + \beta_{12}(\psi_2, \theta_2, \phi_2) \cdot \gamma_{220} + \gamma_{12}(\psi_2, \theta_2) \cdot \gamma_{320}) - (\alpha_{13}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) \cdot \gamma_{130} +$$

$$+ \beta_{13}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) \cdot \gamma_{230} + \gamma_{13}(\psi_3, \theta_3) \cdot \gamma_{330}) = 0$$

$$(\alpha_{22}(\psi_2, \theta_2, \phi_2) \cdot \gamma_{120} + \beta_{22}(\psi_2, \theta_2, \phi_2) \cdot \gamma_{220} + \gamma_{22}(\psi_2, \theta_2) \cdot \gamma_{320}) - (\alpha_{23}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) \cdot \gamma_{130} +$$

$$+ \beta_{23}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) \cdot \gamma_{230} + \gamma_{23}(\psi_3, \theta_3) \cdot \gamma_{330}) = 0$$

A hajtókar forgócsuklójára felírt kényszeregyenlet:

$$x_{G_3} + x_{34} \cdot \alpha_{13}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) + y_{34} \cdot \beta_{13}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) + z_{34} \cdot \gamma_{13}(\psi_3, \theta_3) - (x_{G_4} + x_{43} \cdot \alpha_{14}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) +$$

$$+ y_{43} \cdot \beta_{14}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) + z_{43} \cdot \gamma_{14}(\psi_4, \theta_4)) = 0$$

$$y_{G_3} + x_{34} \cdot \alpha_{23}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) + y_{34} \cdot \beta_{23}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) + z_{34} \cdot \gamma_{23}(\psi_3, \theta_3) - (y_{G_4} + x_{43} \cdot \alpha_{24}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) +$$

$$+ y_{43} \cdot \alpha_{24}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) + z_{43} \cdot \gamma_{24}(\psi_4, \theta_4)) = 0$$

$$z_{G_3} + x_{34} \cdot \alpha_{33}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) + y_{34} \cdot \beta_{33}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) + z_{34} \cdot \gamma_{33}(\psi_3, \theta_3) - (z_{G_4} + x_{43} \cdot \alpha_{34}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) +$$

$$+ y_{43} \cdot \beta_{34}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) + z_{43} \cdot \gamma_{34}(\psi_4, \theta_4)) = 0$$

$$(\alpha_{13}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) \cdot \gamma_{130} + \beta_{13}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) \cdot \gamma_{230} + \gamma_{13}(\psi_3, \theta_3) \cdot \gamma_{330}) - (\alpha_{14}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) \cdot \gamma_{140} +$$

$$+ \beta_{14}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) \cdot \gamma_{240} + \gamma_{14}(\psi_4, \theta_4) \cdot \gamma_{340}) = 0$$

$$(\alpha_{23}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) \cdot \gamma_{130} + \beta_{23}(\psi_3, \theta_3, \phi_3) \cdot \gamma_{230} + \gamma_{23}(\psi_3, \theta_3) \cdot \gamma_{330}) - (\alpha_{24}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) \cdot \gamma_{140} +$$

$$+ \beta_{24}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) \cdot \gamma_{240} + \gamma_{24}(\psi_4, \theta_4) \cdot \gamma_{340}) = 0$$

A dugattyú forgócsuklójára felírt kényszeregyenlet:

$$x_{G_4} + x_{41} \cdot \alpha_{14}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) + y_{41} \cdot \beta_{14}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) + z_{41} \cdot \gamma_{14}(\psi_4, \theta_4) + a \cdot b_{114}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) -$$

$$-(x_{G_1} + x_{14} \cdot \alpha_{110} + y_{14} \cdot \alpha_{210} + z_{14} \cdot \alpha_{310}) = 0$$

$$y_{G_4} + x_{41} \cdot \alpha_{24}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) + y_{41} \cdot \beta_{24}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) + z_{41} \cdot \gamma_{24}(\psi_4, \theta_4) -$$

$$-(y_{G_1} + x_{14} \cdot \beta_{110} + y_{14} \cdot \beta_{210} + z_{14} \cdot \beta_{310}) = 0$$

$$z_{G_4} + x_{41} \cdot \alpha_{34}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) + y_{41} \cdot \beta_{34}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) + z_{41} \cdot \gamma_{34}(\psi_4, \theta_4) -$$

$$-(z_{G_1} + x_{14} \cdot \gamma_{110} + y_{14} \cdot \gamma_{210} + z_{14} \cdot \gamma_{310}) = 0$$

$$\alpha_{14}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) \cdot \alpha_{140} + \beta_{14}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) \cdot \alpha_{240} + \gamma_{14}(\psi_4, \theta_4) \cdot \alpha_{340} - b_{111} = 0$$

$$\alpha_{24}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) \cdot \alpha_{140} + \beta_{24}(\psi_4, \theta_4, \phi_4) \cdot \alpha_{240} + \gamma_{24}(\psi_4, \theta_4) \cdot \alpha_{340} - b_{211} = 0$$

3. Következtetések

A hajtómű helyzetét hat koordináta határozza meg, amelyből három koordináta a test X_{Gi} , Y_{Gi} , Z_{Gi} súlypontját, a másik három a központi tehetetlenségi főtengelyek és egy tetszős szerint felvett OXYZ rögzített rendszer koordinátatengelyével bezárt α_p , β_p , γ_p forgásszögek képeznek. A kényszeregyenletek módszerének határozott előnyei vannak, éspedig a hajtómű minden tagja súlypontjának pozícióját meghatározhatóvá teszi, minden Ψ választott vezérparaméter-értékre. Ezzel az előnyös módszerrel lehet meghatározni az alkatrészek tehetetlenségi főtengelyének helyzetét.

Szakirodalmi hivatkozások

- [1] Papp I.: *Mechanizmusok elmélete*. Scientia Kiadó, Kolozsvár, 2010. 226 oldal.
- [2] Popa-Müller I., Papp I.: *Négyszögletes térmechanizmus kinematikai vizsgálata kényszeregyenletek segítségével*. XXII OGÉT Nemzetközi Gépész Találkozó, Nagyszeben, Románia, 2014, ISSN 2068-1267, 301–305.
- [3] Popa-Müller I., Papp I.: *Ötoldalú térmechanizmus kinematikai vizsgálata*. Műszaki Tudományos Közlemények 6. (2017) 147–150.
<https://doi.org/10.33895/mtk-2017.06.16>
- [4] Popa-Müller I., Papp I.: *Ötoldalú térmechanizmus, sebesség meghatározás*. XXV. OGÉT Nemzetközi Gépész Találkozó, Kolozsvár, Románia, 2017, ISSN 2068-1267, 340–344.
- [5] Popa-Müller I., Papp I.: *Ötoldalú térmechanizmus, gyorsulás meghatározás*. Műszaki Tudományos Közlemények, 9. (2018) 199–202.
<https://doi.org/10.33895/mtk-2018.09.45>