

PAPP ISTVÁN

# MECHANIZMUSOK OPTIMÁLIS KIEGYENSÚLYOZÁSÁNAK ELMÉLETE

MŰSZAKI TUDOMÁNYOS FÜZETEK



ERDÉLYI MŰZEUM-EGYESÜLET

PAPP ISTVÁN  
MECHANIZMUSOK OPTIMÁLIS KIEGYENSÚLYOZÁSÁNAK ELMÉLETE

**MŰSZAKI TUDOMÁNYOS FÜZETEK**

---

**14.**

**ISSN 2068 – 3081**

MŰSZAKI TUDOMÁNYOS FÜZETEK

---

14.

PAPP ISTVÁN

MECHANIZMUSOK OPTIMÁLIS  
KIEGYENSÚLYOZÁSÁNAK ELMÉLETE



ERDÉLYI MÚZEUM-EGYESÜLET

Kolozsvár

2020

A kötet megjelenését támogatta a Nemzeti Kulturális Alap, a Communitas Alapítvány,  
a Bethlen Gábor Alapkezelő Zrt., a Magyar Tudományos Akadémia és  
az EME Műszaki Tudományok Szakosztálya.



© Papp István, EME 2020

**Szaklektor:** Máté Márton

**Kiadja:** Az Erdélyi Múzeum-Egyesület

**Felelős kiadó:** Biró Annamária

**Sorozatszerkesztő:** Bitay Enikő

**Olvasószerkesztő:** Szenkovics Enikő

**Borítóterv:** Könczey Elemér

**Műszaki szerkesztő:** Szilágyi Júlia

**Nyomdai munkálatok:**

F&F International Kft. Kiadó és Nyomda, Gyergyószentmiklós

Ügyvezető igazgató: Ambrus Enikő

Tel./Fax: +40-266-364171

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

PAPP, ISTVÁN

**Mechanismusok optimális kiegyensúlyozásának elmélete / Papp István.** - Cluj-Napoca : Erdélyi Múzeum-Egyesület, 2020

Conține bibliografie

ISBN 978-606-739-155-8

## TARTALOM

Előszó.....	9
<b>1. Alkalmazott mátrixszámítás .....</b>	<b>13</b>
1.1. Két ortogonális koordináta-rendszer transzformációja .....	13
1.2. Az $\vec{\omega}_i$ szögsebesség és az $\vec{\varepsilon}_i$ szöggyorsulás alkotóinak meghatározása az „i”-edik tag $O_i x_i y_i z_i$ központi tehetetlenségi főtengelyeivel egybeeső koordináta-rendszerhez viszonyítva.....	21
1.3. Koordináta-transzformáció, Euler-szögek.....	23
1.3.1. Az $\vec{\omega}_i$ szögsebesség és az $\vec{\varepsilon}_i$ szöggyorsulás-vektorkoordináták számítása az „i”-edik tag $O_i x_i y_i z_i$ tehetetlenségi főirányaihoz viszonyítva .....	26
1.4. A mechanizmusokban ható tehetetlenségi erők és nyomatékok redukálása egy rögzített koordináta-rendszerhez viszonyítva.....	30
1.5. Periodikus függvények Fourier-sorban való kifejtése .....	33
1.6. Jelölések.....	37
<b>2. A kinematikai párok kényszeregyenletei .....</b>	<b>39</b>
2.1. Alapelvek.....	39
2.2. A kinematikai párok kényszeregyenletei az $O_{ij}^* x_i^*$ és az $O_{ji}^* x_j^*$ tengelyek egybeesése esetén .....	47
2.2.1. A henger alakú csukló esete .....	47
2.2.2. A forgó csukló esete.....	48
2.2.3. A csúszka (keresztfej) esete .....	49
2.2.4. A gömbcsukló esete .....	50
2.2.5. Az egytetemes csukló (kardánkereszt vagy csapos gömbcsukló) esete ..	51
2.2.6. A menetes csukló esete .....	53

2.3. Kinematikai párok kényszeregyenletei az $O_{ij}^*x_i^*$ és az $O_{ji}^*x_j^*$ tengelyek egymásra helyezése esetén.....	54
2.3.1. A henger alakú csukló esete.....	56
2.3.2. A forgó csukló esete.....	57
2.3.3. A csúszka (keresztfej) esete.....	57
2.3.4. A gömbcsukló esete.....	58
2.3.5. Az egytetemes csukló (kardánkereszt vagy csapos gömbcsukló) esete..	58
2.3.6. A menetes csukló esete.....	59
<b>3. A sebességek kényszeregyenletei.....</b>	<b>61</b>
3.1. A sebességek kényszeregyenletei az $O_{ij}^*x_i^*$ és az $O_{ji}^*x_j^*$ tengelyek egybeesésekor.....	61
3.1.1. A hengeres csukló.....	64
3.1.2. A forgó csukló.....	65
3.1.3. A csúszka (keresztfej).....	66
3.1.4. A gömbcsukló.....	67
3.1.5. Az egytetemes csukló.....	68
3.1.6. A menetes csukló.....	69
3.2. A sebességek kényszeregyenletei az $O_{ij}^*y_i^*$ és az $O_{ji}^*y_j^*$ tengelyek egybeesésekor.....	71
3.2.1. A henger alakú csukló.....	71
3.2.2. A forgó csukló.....	73
3.2.3. A csúszka (keresztfej).....	74
3.2.4. A gömbcsukló.....	75
3.2.5. Az egytetemes csukló.....	75
3.2.6. A menetes csukló.....	76
<b>4. A gyorsulások kényszeregyenletei.....</b>	<b>79</b>
4.1. A gyorsulások kényszeregyenletei az $O_{ij}^*x_i^*$ és az $O_{ji}^*x_j^*$ tengelyek egybeesésekor.....	79
4.1.1. A henger alakú csukló.....	85
4.1.2. A forgó csukló.....	85
4.1.3. A csúszka (keresztfej).....	87
4.1.4. A gömbcsukló.....	88
4.1.5. Az egytetemes csukló.....	89
4.1.6. A menetes csukló.....	90

4.2. A gyorsulások kényszeregyenletei az $O_{ij}^*y_i^*$ és az $O_{ji}^*y_j^*$ tengelyek egybeesésekor .....	91
4.2.1. A henger alakú csukló .....	92
4.2.2. A forgó csukló .....	93
4.2.3. A csúszka (keresztfej) .....	95
4.2.4. A gömbcsukló .....	95
4.2.5. Az egytetemes csukló .....	96
4.2.6. A menetes csukló .....	98
<b>5. Kinematikai párok Euler-szögekkel kifejezett kényszeregyenletei .....</b>	<b>99</b>
5.1. Alapelvek .....	99
5.2. A kinematikai párok helyzeteit meghatározó kényszeregyenletek az $O_{ij}^*z_i^*$ és az $O_{ji}^*z_j^*$ tengelyek egymásra helyezése esetén .....	105
5.2.1. A gömbcsukló .....	105
5.2.2. Az egytetemes csukló (kardánkereszt vagy csapos gömbcsukló) .....	105
5.2.3. A henger alakú csukló .....	107
5.2.4. A csúszka (keresztfej) .....	108
5.2.5. A forgó csukló .....	109
5.2.6. A menetes csukló .....	110
5.3. A sebességek kényszeregyenletei az $O_i^*z_i^*$ és az $O_j^*z_j^*$ tengelyek egymásra helyezése esetén .....	111
5.3.1. A gömbcsukló .....	112
5.3.2. Az egytetemes csukló (kardánkereszt vagy csapos gömbcsukló) .....	113
5.3.3. A hengeres csukló .....	115
5.3.4. A csúszka (keresztfej) .....	116
5.3.5. A forgó csukló .....	117
5.3.6. A menetes csukló .....	118
5.4. A gyorsulások kényszeregyenletei .....	120
5.4.1. A gömbcsukló .....	123
5.4.2. Az egytetemes csukló (kardánkereszt vagy csapos gömbcsukló) .....	124
5.4.3. A hengeres csukló .....	125
5.4.4. A csúszka (keresztfej) .....	127
5.4.5. A forgó csukló .....	129
5.4.6. A menetes csukló .....	131



<b>6. A térmechanizmusok dinamikai kiegyensúlyozása és optimalizálása</b> .....	133
6.1. A teljes kiegyensúlyozás .....	133
6.2. Optimális kiegyensúlyozás a géptörzsre ható tehetetlenségi erők és a tehetetlenségi erők nyomatókainak minimálisra való csökkentésével .....	138
6.3. Gyakorlati alkalmazás .....	142
6.3.1. Az ellensúlyok tartótengelyére ható optimális kiegyensúlyozó erők alkotóinak meghatározása.....	142
6.3.2. Az első kiegyensúlyozó tengellyel ellentétes irányban forgó, második tengelyre ható optimális kiegyensúlyozó erők alkotóinak meghatározása .....	144
6.3.3. Példa .....	148
6.4. A géptörzshöz tartozó szabadon választott pont rezgésamplitúdóinak meghatározása .....	149
6.5. Egy adott pont rezgésamplitúdójának optimalizálása.....	153
6.6. Algoritmus egy választott pont optimális rezgéscsökkentésére, egytengelyes kiegyensúlyozás esetén .....	155
 Szakirodalom .....	 158
 The Theory of Optimal Balancing of Mechanisms ( <i>Summary</i> ) .....	 161
Contents .....	163
 Theorie des optimalen Auswuchtens der Mechanismen ( <i>Zusammenfassung</i> ) ....	 167
Inhalt .....	169
 Teoria echilibrării optime a mecanismelor ( <i>Rezumat</i> ).....	 173
Cuprins .....	175

## ELŐSZÓ

Az emberiség történetében vitathatatlan szerepet betöltő műszaki fejlődés alapkövének minden bizonnyal a mechanikát tekinthetjük, bár tudomásul kell venni, hogy az elméleti alapokat – mint bármely más tudományterületen – a gyakorlati alkalmazások jóval megelőzték. Nem történt ez másként a gépek fejlődésében sem. A modern mechanika megalapítása előtt is léteztek működő szerkezetek, amelyek ötletességük alkotójuk géniuszát dicséri. A műszaki fejlődés bármelyik területét vizsgálva észrevehetjük, hogy valóban hatékony és helyüket megálló alkotások akkor születtek, amikor az elmélet és a gyakorlati cél között tökéletes volt a harmónia, amit csakis a konstruktőr-mérnök tehetsége és vállalása hívhatott életre.

A gépek, szerkezetek története messze az ókorba nyúlik vissza, de az első tudományos rendszerbe szedett leírásokat *Agricolának* (Georg Bauer), illetve Leonardo da Vincinek lehet – szokás – tulajdonítani. E mesterek munkái alapján fejlődött tovább a mechanizmusok tudománya, ami olyan ismeretek tárházává változott napjainkra, ami nélkül elképzelhetetlen a gépek és szerkezetek megalkotása. Az alkalmazott műszaki tudományok, és ezen belül a mechanizmusok történetének a XX. század végétől napjainkig tartó időszakát jellemző lényeges megújulás a számítógép már nélkülözhetetlen jelenléte jellemzi a legtalálóbban. Az alkalmazott gyakorlati számítások mennyisége és komplexitása már nem jelent akadályt, a hipotéziseket felállító mérnök fantáziáját nem köti gúzsba. Rengeteg új eljárás született ennek köszönhetően, de a hozzájuk tartozó modelleket már nem lehet számítógép nélkül kezelni. Arra viszont figyelmet kell fordítani, hogy a frappánsan gyors és elegáns számítások mennyisége mögött ne vesszen el a modellt sugalló gondolat.

Dr. Papp István okleveles gépészmérnök, egyetemi docens *Mechanizmusok optimális kiegyensúlyozásának elmélete* című munkája az előbbieken feltárt gondolatok szellemében megalkotott mű. Elsősorban pontosítani szeretném, hogy nem alapszintű egyetemi tankönyvet tart a kezében az Olvasó. Ennek a műnek a megértéséhez az alapfokú matematikai, mechanikai, illetve mechanizmuselméleti

ismeretek nélkülözhetetlenek. Igen jelentős segítséget nyújt viszont azoknak, akik a mechanizmusok, gépszerkezettan vagy robotok területén adott kérdéssel elmélyülten szeretnének foglalkozni. E műben részletesen ismertetett elmélet olyan esz-közzé válik a gyakorló mérnök kezében, aminek segítségével messzemenően jobb, hatékonyabban működő szerkezeteket tud tervezni, mint klasszikus ismeretekre alapozva, amelyek segítségével lehet találni sok jó megoldást, de nem az egyetlen optimálist. Így a könyvet elsősorban a doktoranduszhallgatók és kutatók figyelmé-be ajánlom, de nem árt, ha a magiszteri képzésben részt vevő diákok és a gyakorló mérnökök is beleolvasnak.

A könyv öt fejezete a térmechanizmusok problémakörét járja körül, a szükséges matematikai alapoktól a dinamikus kiegyensúlyozásig, alaposan, világosan tárgyalva és kimerítve minden szükséges problémakört.

Az első fejezet a későbbiekben felhasznált matematikai alapokat tekinti át. Az általános koordinátatranszformációt nem a hagyományos Euler-szögeken alapuló forgatással, hanem a koordinátatengelyek körüli sorozatos elforgatással tárgyalja, így a homogén transzformációs mátrix forgató almátrixának elemei az egyes tengelyek körüli elforgatási szögek függvényei lesznek. Ezáltal a számítógépes elemzés biztosabbá válik – az elfordulás szögei mindig egyértelműen meghatározhatók –, másrészt pedig a gyakorló mérnök geometriai felfogásához sokkal közelebb álló eszközöket alkot.

A második fejezet a térmechanizmusok elemeit összekötő alacsony osztályú csuklók által létrehozott kényszerek matematikai modelljét ismerteti részletesen. A vizsgálat mindegyik csuklótípusra kiterjed, ennek célja pedig a mechanizmust alkotó elemek egymáshoz viszonyított, illetve a bázishoz viszonyított elmozdulásának kiszámítása. A módszer a zárt vektorsokszögre épül, melynek eredményeképpen felállíthatók a kényszeregyenletek, amelyek megoldásait a keresett elmozdulások jelentik.

A harmadik és negyedik fejezet felépítésében, stílusában és szakmai üzenetében a második fejezetet követi. Ezekben a fejezetekben a mechanizmus eleme választott pontjának sebességét, illetve gyorsulását számító egyenletrendszereket írja fel a szerző, töretlen tudományos pontossággal. Meg kell jegyezmem, hogy hasonló felépítésű és tárgyalású, mechanizmusokról szóló könyvet nemigen tartottam kezemben.

Az ötödik fejezet az előző négy fejezetben ismertetett összefüggésekből építi fel a dinamikai kiegyensúlyozás problémakörét, valamint ennek megoldását. A szerkezetet terhelő tehetetlenségi erők és nyomatékok vektorkettősének részletes számítását a kiegyensúlyozást biztosító tömegek elhelyezésének és méretének kiszámítása követi. Az elméletileg tökéletes, de a gyakorlatban nagyrészt megvalósíthatatlan háromtengelyes kiegyensúlyozás részletes matematikai leírása után a kéttengelyes,

illetve az egytengelyes kiegyensúlyozás matematikai modelljeit teljességében elemzi és tárja fel az általános modell sajátos eseteként, és ezáltal nemcsak megerősíti a modell érvényességét, hanem egy magasabb szintű mérnöki gondolkodás alapköveit is elülteti az Olvasó értékrendszerében.

A matematikai modellek általános esetekre vannak elkészítve – a legbonyolultabb az erre felírt kényszeregyenlet-rendszer. Az egyes csuklók sajátos geometriája abban érvényesül, hogy az általánosan felírt egyenletrendszer a csukló típusának függvényében, az egyenletek kifejezésében módosul, azaz egyszerűsödik. Az Olvasó így könnyebben tudja érzékelni a felvezetett általános modellek erejét, ugyanakkor, az egyes sajátosítások kapcsán a tárgyalt csukló által létrehozott kényszerek kinematikai és dinamikai jellegét.

Meggyőződésem, hogy – bár nem egyszerű és könnyű munkára vállalkozik az Olvasó, ha a jelen könyvben feltárt eszméket és elméletet próbálja elsajátítani – a gépszerkesztők és gyakorló mérnökök az idáig ismert leghatékonyabb fegyver birtokosai lesznek, amivel biztos megoldást találnak a gépstruktúrák megalkotásának műszaki konfliktusokkal igen-igen terhes világában.

Személyesen köszönetemet szeretném kifejezni dr. Papp István okleveles gépészmérnök tanártársamnak, és barátomnak, hogy ezt a hatalmas munkát elvégezte, miáltal nem csak az erdélyi magyar vagy egyetemes magyar tudományosságot gazdagítja és egyetemünk jó hírnevét öregbíti, hanem az egyetemes műszaki tudás ember és természet kapcsolatát megértető hídjának műszaki sávjához nélkülözhetetlen fontosságú pillért támasztott – a rá jellemző szerénységgel és tudással.

*Marosvásárhely, 2019. szeptember 24.*



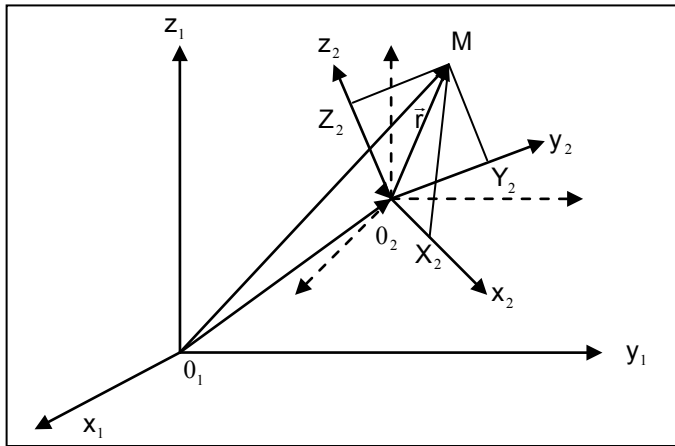
*Máté Márton*



## 1. ALKALMAZOTT MÁTRIXSZÁMÍTÁS

### 1.1. Két ortogonális koordináta-rendszer transzformációja.

Tekintsük az (1)-gyel jelölt  $O_1x_1y_1z_1$  rögzített és a (2)-vel jelölt  $O_2x_2y_2z_2$  mozgó koordináta-rendszert, valamint egy  $M$  pontot a térben, ahogy az 1.1. ábrán látható.



1.1. ábra. Az álló és a mozgó koordináta-rendszer kölcsönös helyzete

Az  $M$  pont (2)-beli  $O_2M$ , valamint az  $O_2$  pont  $O_1O_2$  helyvektorai között az alábbi összefüggés írható fel:

$$\mathbf{O}_1\mathbf{M} = \mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 + \mathbf{O}_2\mathbf{M} \quad (1.1)$$

A két koordináta-rendszer  $\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1$ , illetve  $\mathbf{i}_2, \mathbf{j}_2, \mathbf{k}_2$  bázis-egységvektoraival kifejezve az (1.1) egyenlet  $\mathbf{O}_1\mathbf{M}$  és  $\mathbf{O}_2\mathbf{M}$  vektorait, a következő kifejezéseket kapjuk:

$$\begin{cases} \mathbf{O}_1\mathbf{M} = X_1\mathbf{i}_1 + Y_1\mathbf{j}_1 + Z_1\mathbf{k}_1 \\ \mathbf{O}_2\mathbf{M} = X_2\mathbf{i}_2 + Y_2\mathbf{j}_2 + Z_2\mathbf{k}_2 \end{cases} \quad (1.2)$$

Az 1.2. vektoregyenletekben  $X_1, Y_1, Z_1$  az  $M$  pont koordinátái az (1)-es koordináta-rendszerben, az  $X_2, Y_2, Z_2$  pedig a (2)-es koordináta-rendszerben.

Az  $\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2$  helyvektor az (1) rendszerhez viszonyított koordinátáit  $X_0, Y_0, Z_0$ -val jelöltük, így felírható, hogy:

$$\mathbf{O}_1\mathbf{O}_2 = X_0\mathbf{i}_1 + Y_0\mathbf{j}_1 + Z_0\mathbf{k}_1 \quad (1.3)$$

Szorozzuk be az (1.2) és (1.3) vektoregyenletek jobb oldalát skalárisan az  $\vec{\mathbf{i}}_1$  egységvektorral, és vegyük figyelembe, hogy:  $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_1 = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_1 = 1$ , valamint  $\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_1 = \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_1 = 0$ .

A műveleteket nem részletezve, az (1.1) egyenletbe való behelyettesítés után következnek:

$$X_1 = (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2)X_2 + (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_2)Y_2 + (\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_2)Z_2 + X_0 \quad (1.4)$$

Hasonlóképpen, ha az (1.1) egyenletet a  $\mathbf{j}_1$  és  $\mathbf{k}_1$  egységvektorokkal is beszorozzuk, az alábbi kifejezéseket kapjuk:

$$\begin{cases} Y_1 = (\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_2)X_2 + (\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_2)Y_2 + (\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_2)Z_2 + Y_0 \\ Z_1 = (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_2)X_2 + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_2)Y_2 + (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)Z_2 + Z_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

A (1.4) és az (1.5) összefüggések mátrixos alakban is kifejezhetők, egy  $4 \times 4$ -es homogén mátrix segítségével:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{j}_2 & \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{k}_2 & X_0 \\ \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{i}_2 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{j}_2 & \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{k}_2 & Y_0 \\ \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{i}_2 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{j}_2 & \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 & Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

A bekeretezett  $\mathbf{T}_f$  forgatómátrix az általános transzformáció-egyenletben a két rendszer egymáshoz viszonyított elfordulását jellemzi.

Figyelembe véve, hogy két egységvektor skaláris szorzata egyenlő a két vektor között bezárt szög koszinuszával, az (1.6) forgatómátrixot kifejezhetjük az elfordulást meghatározó iránytényezők segítségével is:

$$\mathbf{T}_f = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \beta_1 & \cos \gamma_1 \\ \cos \alpha_2 & \cos \beta_2 & \cos \gamma_2 \\ \cos \alpha_3 & \cos \beta_3 & \cos \gamma_3 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

A koszinusz függvények alatti  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  szögeket a két koordináta-rendszer bázisvektorai határozzák meg. Ezt az alábbi táblázatból olvashatjuk ki:

	$\mathbf{i}_2$	$\mathbf{j}_2$	$\mathbf{k}_2$
$\mathbf{i}_1$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\gamma_1$
$\mathbf{j}_1$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\gamma_2$
$\mathbf{k}_1$	$\alpha_3$	$\beta_3$	$\gamma_3$

(1.8)

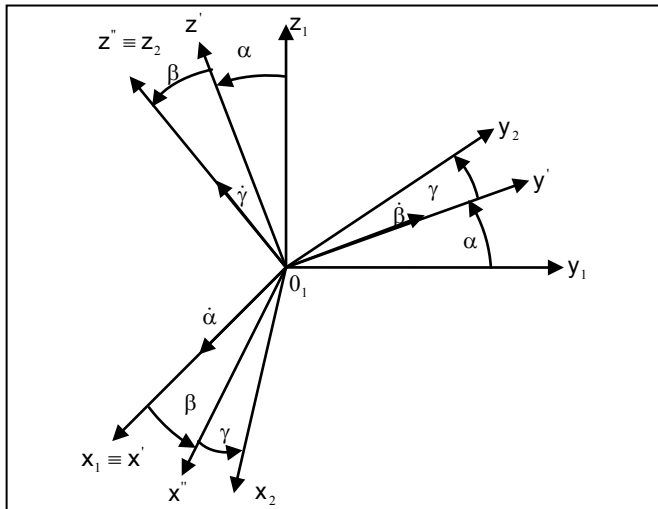
A (2)-es rendszernek az (1)-es rendszerhez viszonyított térbeli elfordulása három irányított tengely mentén végbemenő, egymást követő forgatás összetevőjeként is kezelhető. Mivel csak a forgatás sajátosságait vizsgáljuk, feltételezzük, hogy a két origó egybeesik.

A három forgatás bemutatásához bevezetjük a (2')-vel jelölt  $O_1x'y'z'$ , valamint a (2'')-vel jelölt  $O_1x''y''z''$  segéd koordináta-rendszereket, ahogy az az 1.2. ábrán látható.

Kezdetben a két rendszer egybeesik. A mozgó, (2)-es rendszer először az  $x_1 \equiv x'$  tengely körül  $\alpha$  szöggel fordul el és a (2') helyzetbe kerül. Ezt követően az  $y' \equiv y''$  tengely körül  $\beta$  szöggel fordul el és a (2'') helyzetbe kerül. Végül a  $z_2 \equiv z''$  tengely körüli  $\gamma$  szögű elfordulással kerül az előírt (2)-es helyzetbe.

Az  $M$  pont  $\mathbf{r}$  helyvektorának koordinátáit a felsorolt négy koordináta-rendszerben a következő oszlopmatrixok segítségével fejezzük ki:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}; \mathbf{r}' = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}; \mathbf{r}'' = \begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{bmatrix}; \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$



1.2. ábra. A három tengely körüli forgatás

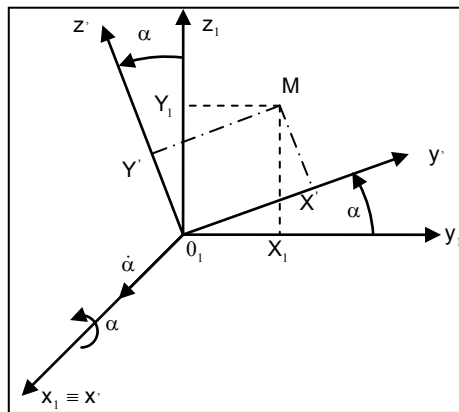


1. ALKALMAZOTT MÁTRIXSZÁMÍTÁS

Az 1.3., 1.4. és 1.5. ábra a (2)-es koordináta-rendszerről az (1)-es rendszerre való áttérést képező három, egymást követő elfordulás geometriai összefüggéseit mutatja be az egyes forgatási síkokban, valamint az  $\mathbf{r}$  vektor (1.9) képletekkel felírt összetevőit.

A mozgó rendszer első elfordulása után az  $O_2x'y'z'$  koordináta-rendszerre tevődik, miközben  $y'y'$  tengelye az  $O_1y_1z_1$  síkban fordul el, amíg az  $y_1$  helytálló tengellyel  $\alpha$  szöget zár be (1.3. ábra). Innen felírhatjuk, hogy:

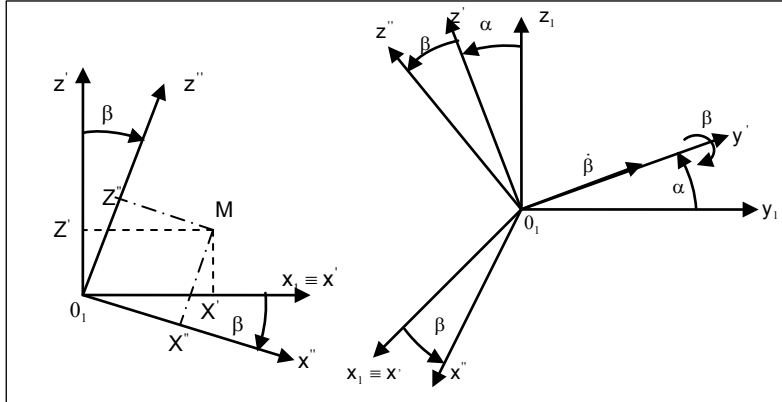
$$\begin{aligned} X_1 &= X' \\ Y_1 &= Y' \cos \alpha - Z' \sin \alpha \\ Z_1 &= Y' \sin \alpha + Z' \cos \alpha \end{aligned} \tag{1.10}$$



1.3. ábra

A második elfordulás az  $y'$  tengely körül történik, aminek következtében az  $O_2x'z'$  síkban elforduló  $z'$  tengely a végső  $z'' \equiv z_2$  helyzetbe kerül, és az indulási helyzetével  $\beta$  szöget zár be (1.4. ábra). Ennek a forgatásnak az alábbi képletek felelnek meg:

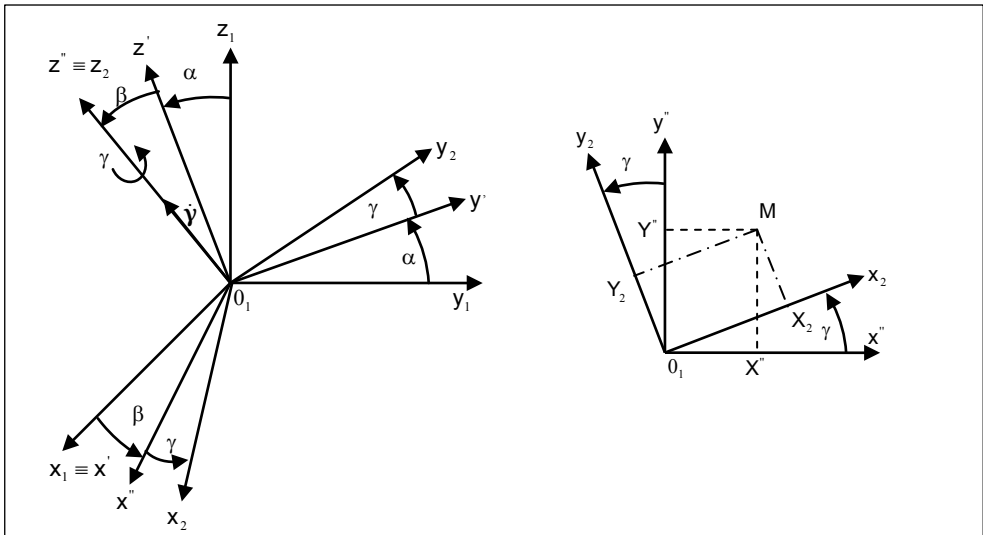
$$\begin{cases} X' = X'' \cos \beta + Z'' \sin \beta \\ Y' = Y'' \\ Z' = -X'' \sin \beta + Z'' \cos \beta \end{cases} \tag{1.11}$$



1.4. ábra

A harmadik forgatás az  $O_2x''y''$  síkban történik a rá merőleges  $z'' = z_2$  tengely körül. Az elfordulás után az  $x''$  tengely végleges helyzete  $x_2$ -tel van jelölve. Kezdeti helyzetéhez, azaz az  $x''$  tengelyhez viszonyítva  $\gamma$  szöggel fordult el (1.5. ábra).

$$\begin{cases} X'' = X_2 \cos \gamma - Y_2 \sin \gamma \\ Y'' = X_2 \sin \gamma + Y_2 \cos \gamma \\ Z'' = Z_2 \end{cases} \quad (1.12)$$



1.5. ábra

Az (1.10), (1.11) és (1.12) egyenletek mátrix alakban is kifejezhetők:

$$\mathbf{T}_{1,2}'\mathbf{r}' = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}; \quad (1.13)$$

$$\mathbf{T}_{2',2}''\mathbf{r}'' = \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{bmatrix}; \quad (1.14)$$

$$\mathbf{T}_{2'',2}\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

vagy tömören

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{T}_{1,2}'\mathbf{r}', \mathbf{r}' = \mathbf{T}_{2',2}''\mathbf{r}'', \mathbf{r}'' = \mathbf{T}_{2'',2}\mathbf{r}_2 \quad (1.16)$$

Ezzel az  $O_2x_2y_2z_2$  mozgó rendszer helyzetét az álló  $O_1x_1y_1z_1$  koordináta-rendszerben a következő forgatómátrix adja meg:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{T}_{1,2}\mathbf{r}_2 = \mathbf{T}_{1,2}'\mathbf{T}_{2',2}''\mathbf{T}_{2'',2}\mathbf{r}_2 \quad (1.17)$$

A szorzások elvégzése után, az (1.13), (1.14), valamint (1.15) egyenletek figyelembevételével, a forgatómátrix részletes alakját kapjuk:

$\mathbf{T}_{1,2} =$

$$\begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Ismerjük fel, hogy a (1.18) mátrix ortogonális, tehát a  $\mathbf{T}_{1,2}$  inverz mátrixa egyben a  $\mathbf{T}_{1,2}$  transzponáltja, amit  $\mathbf{T}_{2,1}$ -gyel jelölünk. Az 1.17. egyenlet levezetéséhez hasonló módon írhatjuk fel, hogy

$$\mathbf{T}_{2,1} = \mathbf{T}_{2,2}'\mathbf{T}_{2',2}''\mathbf{T}_{2'',1} = \mathbf{T}_{1,2}^T = \mathbf{T}_{1,2}'^T\mathbf{T}_{2',2}''^T\mathbf{T}_{2'',2}^T \quad (1.19)$$

ami kifejtett alakban a következő:

$\mathbf{T}_{2,1} =$

$$\begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \\ -\cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

A vizsgált, a mozgó rendszerrel mereven kapcsolt merev test kis amplitúdójú lengéseinek esetén az  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  szögek annyira kis értékűek lesznek, hogy az (1.18) forgatómátrix elemeire érvényes lesz az alábbi megközelítés:

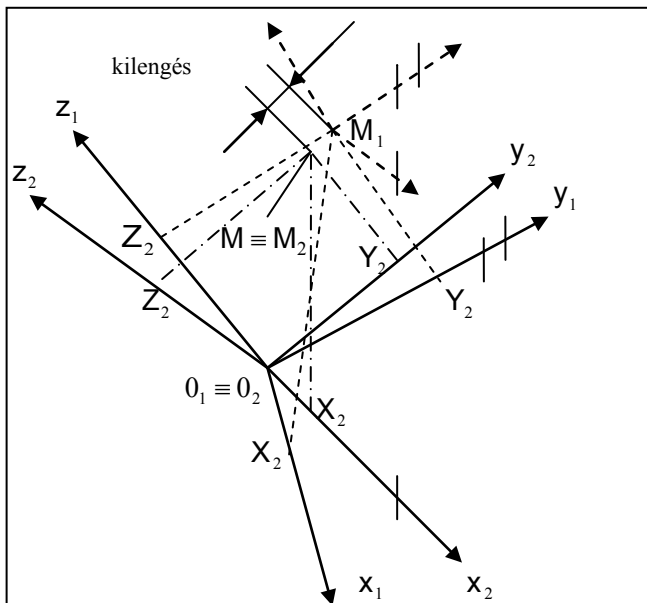
$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \beta = \cos \gamma = 1 \\ \sin \alpha &= \alpha, \quad \sin \beta = \beta, \quad \sin \gamma = \gamma \end{aligned} \quad (1.21)$$

A vizsgált test adott pontjának két különböző helyzetének megfelelő pontkoordinátákra érvényes az alábbi egyenlet:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{(1)} = \mathbf{T}_{1,2} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{(2)} \quad (1.22)$$

A  $\mathbf{T}_{12}$  mátrix elemeiben, a szögek igen kis értékei miatt, a szinuszsorzásokat zérusnak, a koszinuszsorzásokat pedig 1-nek tekintjük. Ezekkel a feltételekkel az (1.18) forgatómátrix a következő alakra egyszerűsödik:

$$\mathbf{T}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$



1.6. ábra

A (2)-es rendszerhez rögzített M pont kezdetben az  $M_1$  ponttal egybeesik, a kilendítés utáni helyzete pedig  $M_2$ -vel jelölt. Az (1) rögzített koordináta-rendszerhez viszonyított koordinátái, kis szögelfordulások esetén, a következők:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{(2)} \quad (1.24)$$

A műveletek elvégzése és a tagok megfelelő csoportosítása után az (1.24) kifejezésből felírható a test nyugalmi helyzetéhez viszonyított kimozdulása, azaz:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{(1)} - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} -y_2\gamma + z_2\beta \\ x_2\gamma - z_2\alpha \\ -x_2\beta + y_2\alpha \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Az (1.25) összefüggés az M pontnak megfelelő  $O_1 \equiv O_2$  origó körüli szögelfordulás okozta kis kilengés vetületeit adja.

Az M pont kilengésének koordinátáit  $x_p, y_p, z_p$ -vel jelölve, felírható:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{(1)} - \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} -y_2\gamma + z_2\beta \\ x_2\gamma - z_2\alpha \\ -x_2\beta + y_2\alpha \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

Ha azt is feltételezzük, hogy a két koordináta-rendszer origója valamilyen okból kifolyólag egymáshoz viszonyítva elmozdul, tehát  $O_1 \neq O_2$ , akkor az M pont rögzített rendszerhez viszonyított elmozdulása a két elmozdulás vektoriális összegével lesz egyenlő. A mozgó koordináta-rendszer origójának (1)-es beli koordinátáit jelölje

$$\underline{\mathbf{O}}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

A vizsgált M pont teljes elmozdulása ezzel az

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -y_2\gamma + z_2\beta \\ x_2\gamma - z_2\alpha \\ -x_2\beta + y_2\alpha \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

alakra hozható, vagy másképp:

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} x - y_2\gamma + z_2\beta \\ y + x_2\gamma - z_2\alpha \\ z - x_2\beta + y_2\alpha \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

## 1.2. Az $\omega_i$ szögsebesség és az $\varepsilon_i$ szöggyorsulás alkotóinak számítása az „i”-edik tag $O_i x_i y_i z_i$ központi tehetetlenségi főtengelyeivel egybeeső koordináta-rendszerhez viszonyítva

Feltételezzük, hogy ismerjük az  $\alpha, \beta$  és  $\gamma$  forgásszögeket, valamint ezek idő szerinti első- és másodrendű deriváltjait, amelyeket  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ , illetve  $\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{\gamma}$  jelöl. Ezek segítségével számítjuk ki a mozgó koordináta-rendszerrel mereven kapcsolt test  $\omega_{x2}, \omega_{y2}, \omega_{z2}$  szögsebesség- és  $\varepsilon_{x2}, \varepsilon_{y2}, \varepsilon_{z2}$  szöggyorsulás-vektorok koordinátáit, a mozgó koordináta-rendszerhez viszonyítva. Az 1.2. ábra szerint a mozgó rendszer tengelyeinek forgatásaihoz tartozó szögsebességvektorok tartóegyenesei egybeesnek az  $Ox_1, Oy_2'$  és az  $Oz_2''$  tengelyekkel, tehát felírható, hogy

$$\dot{\alpha}^{(1)} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \dot{\beta}^{(2')} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \dot{\gamma}^{(2'')} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

Ahhoz, hogy felírjuk a mozgó tengelyek körüli elfordulások deriváltjainak a (2)-es koordináta-rendszerhez viszonyított alkotóit, a  $\mathbf{T}_{21}$ ,  $\mathbf{T}_{2'2'}$  és a  $\mathbf{T}_{22''}$  forgatómátrixokat alkalmazzuk. A (2)-es rendszer szerinti összetevők kifejezése a következők:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}^{(2)} &= \mathbf{T}_{21} \dot{\alpha}^{(1)} \\ \dot{\beta}^{(2)} &= \mathbf{T}_{22''} \mathbf{T}_{2'2'} \dot{\beta}^{(2')} \\ \dot{\gamma}^{(2)} &= \mathbf{T}_{22''} \dot{\gamma}^{(2'')} \end{aligned} \quad (1.31)$$

A műveletek elvégzése után az (1.30) szögsebesség-vektorok oszlopmátrixai a következő alakot öltik:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_x \\ \dot{\alpha}_y \\ \dot{\alpha}_z \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma \\ -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma \\ \dot{\alpha} \sin \beta \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}_x \\ \dot{\beta}_y \\ \dot{\beta}_z \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} \dot{\beta} \sin \gamma \\ \dot{\beta} \cos \gamma \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\gamma}_x \\ \dot{\gamma}_y \\ \dot{\gamma}_z \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

A rögzített  $Ox_1y_1z_1$  rendszer origójába helyezett körül  $\vec{\omega}$  szögsebességgel forgó test sebességvektora a tengelyek körüli forgatások következtében létrejövő pillanatnyi szögsebesség-vektorok összege. Ennélfogva a szögsebesség-vektor koordinátái a testtel együtt mozgó  $O_2x_2y_2z_2$  koordináta-rendszerben az alábbiak:

$$[\omega]^{(2)} = [\dot{\alpha}]^{(2)} + [\dot{\beta}]^{(2)} + [\dot{\gamma}]^{(2)} \tag{1.35}$$

A számítások elvégzése után a következő kifejezésekre jutunk:

$$\omega_{x2} = \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma$$

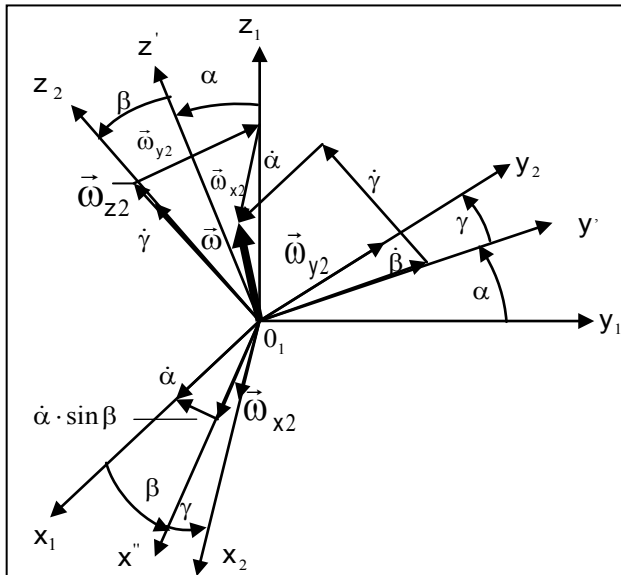
$$\omega_{y2} = -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma$$

$$\omega_{z2} = \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \tag{1.36}$$

Az (1.36) képleteket mátrix alakban is ki lehet fejezni:

$$\begin{bmatrix} \omega_{x2} \\ \omega_{y2} \\ \omega_{z2} \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\cos \beta \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ \sin \beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} \tag{1.37}$$

Az (1.37) mátrixegyenletet idő szerint deriválva számítjuk ki a szöggyorsulásvektor koordinátáit, a testtel együtt mozgó  $O_2x_2y_2z_2$  koordináta-rendszerben (1.7. ábra).



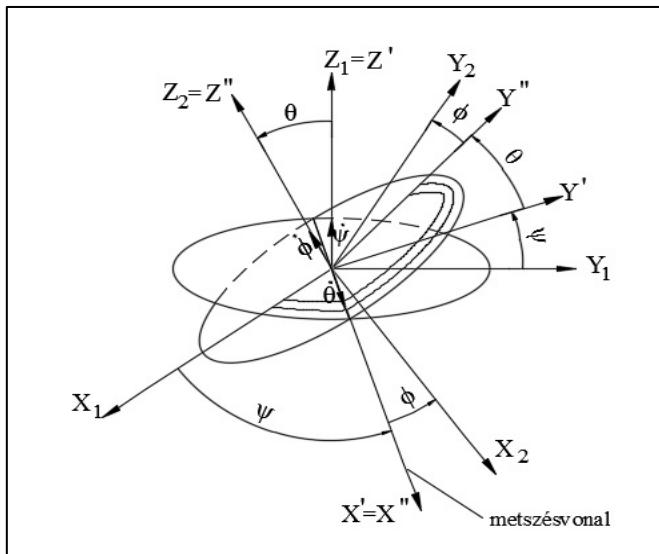
1.7. ábra

Kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x2} \\ \varepsilon_{y2} \\ \varepsilon_{z2} \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\dot{\beta} \sin \beta \cos \gamma - \dot{\gamma} \cos \beta \sin \gamma & \dot{\gamma} \sin \gamma & 0 \\ \dot{\beta} \sin \beta \sin \gamma - \dot{\gamma} \cos \beta \cos \gamma & -\dot{\gamma} \cos \gamma & 0 \\ \dot{\beta} \sin \beta & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\cos \beta \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ \sin \beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

### 1.3. Koordináta-transzformáció, Euler-szögek

A szilárd test helytálló pont körüli forgásának tanulmányozásához képzeljünk el egy álló  $O_1x_1y_1z_1$  koordináta-rendszert és egy szilárd testhez rögzített  $O_2x_2y_2z_2$  koordináta-rendszert, amely a testtel együtt az  $O_1 \equiv O_2$  pont körül forgómozgást végez (1.8. ábra).

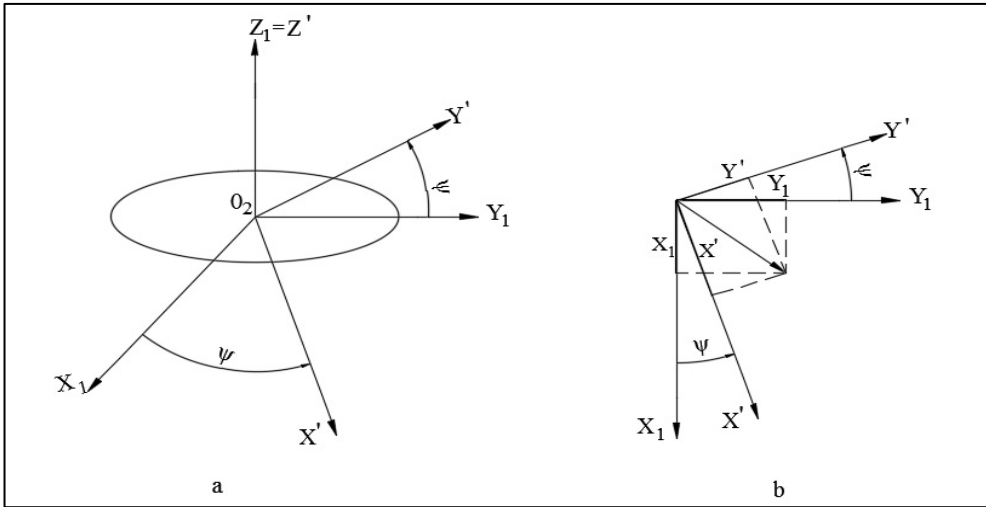


1.8. ábra

Kezdetben a két rendszer egymásra tevődik. A testtel együtt mozgó  $O_2x_2y_2z_2$  rendszer először az  $O_1z_1 = O_2z_2$  tengely körül  $\psi$  precessziós szöggel fordul el. A mozgó rendszer első elfordulása utáni helyzetét  $O_2x_2y_2z_2'$  koordináta-rendszerrel jelöltük. A mozgó rendszer  $O_2x_2'$  tengelye az  $O_1x_1y_1$  síkban mozdul el, és az  $O_1x_1$  álló tengellyel a  $\psi$  precessziós szöveget zárja be (1.9. ábra).

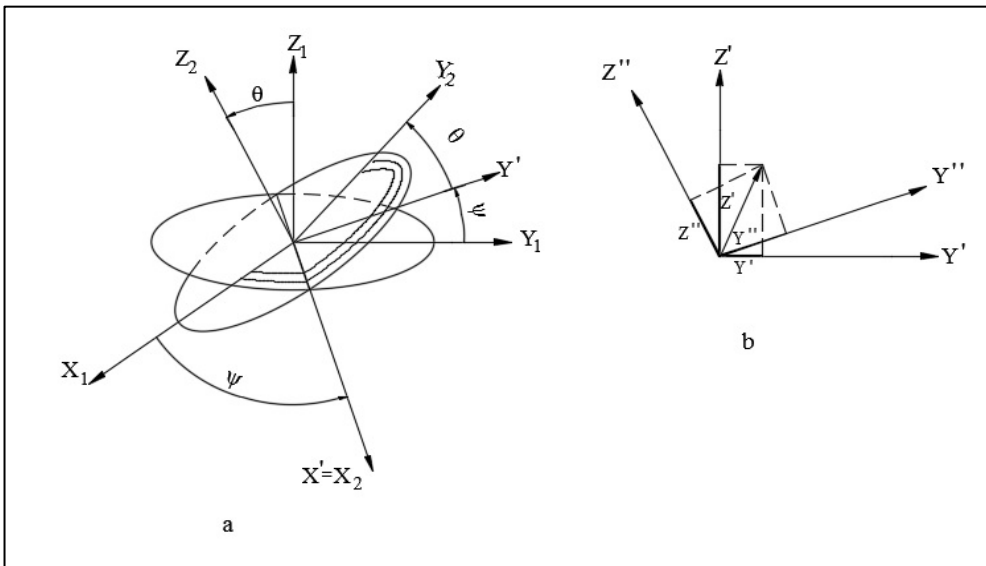


1. ALKALMAZOTT MÁTRIXSZÁMÍTÁS



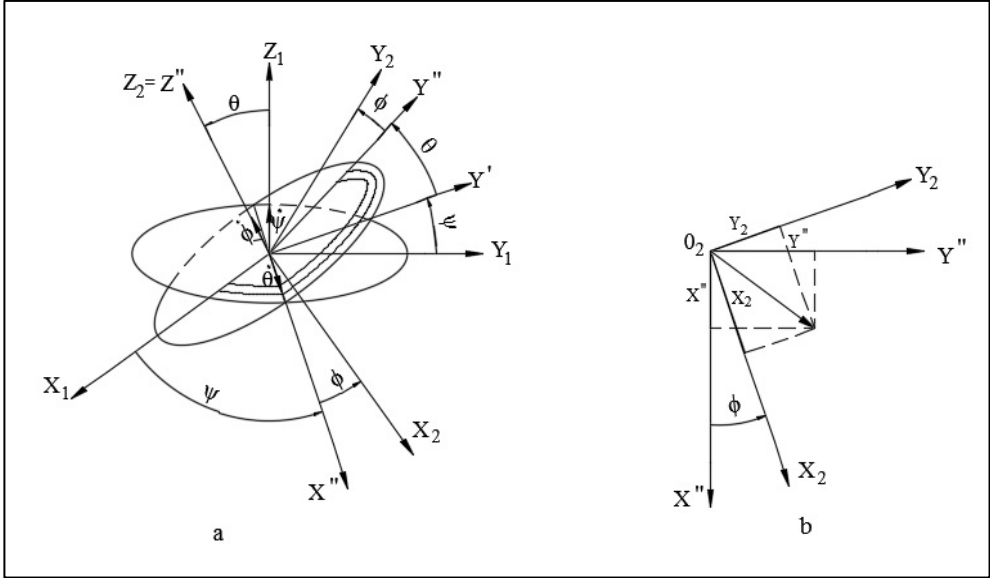
1.9. ábra

A második elfordulás az  $O_2x_2z_2'$  tengely körül történik, amely után az  $O_2y_2z_2'$  síkban elforduló  $O_2z_2z_2''$  tengely végső helyzete  $O_2z_2'' = O_2z_2$ -vel van jelölve. Ez a kezdeti helyzetnek megfelelő  $O_2z_2z_2'$  tengellyel a  $\theta$  úgynevezett nutációs szöveget zárja be (1.10. ábra).



1.10. ábra

A harmadik forgatás az  $O_2''x_2''y_2''$  síkra merőleges  $O_2''z_2'' = O_2z_2$  körül történik, amelynek következményeképpen az  $O_2''x_2''$ -tengely a végleges  $O_2x_2$  helyzetbe kerül. Az elfordulás mértékét a  $\phi$  szög adja meg (1.11. ábra).



1.11. ábra

A három különböző tengely körül elforgatott rendszer  $\psi, \theta, \phi$  Euler-szögeivel egyértelműen meghatározható egy helytálló pont körül mozgó koordináta-rendszer helyzete a térben, azaz rögzített koordináta-rendszerben.

Az  $O_1z_1 = O_2'z_2'$  tengely körüli, első elfordulásnak megfelelő forgatómátrix a következő:

$$\mathbf{T}_{1,2'} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}; \tag{1.39}$$

Az  $O_2'x_2'$  körül történő második elfordulásra az 1.10. ábra alapján írható fel a megfelelő forgatómátrix, mellyel az  $O_2'x_2'y_2'z_2'$  rendszert hozzuk az  $O_2''x_2''y_2''z_2''$  helyzetbe:

$$\mathbf{T}_{2',2''} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}; \tag{1.40}$$

1. ALKALMAZOTT MÁTRIXSZÁMÍTÁS

A harmadik  $O_2''z_2'' = O_2z_2$  tengely körüli forgatásnak pedig felírható az  $O_2''x_2''y_2''z_2''$  rendszert az  $O_2x_2y_2z_2$  helyzetbe illesztő (1.41) forgatómátrix:

$$\mathbf{T}_{2''2} = \begin{bmatrix} x_2'' \\ y_2'' \\ z_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad (1.41)$$

A három egymás utáni forgatásnak megfelelő forgatómátrix, amely megadja az  $O_2x_2y_2z_2$  mozgó rendszer helyzetét az álló  $O_1x_1y_1z_1$  koordináta-rendszerben, a következőképpen fejezhető ki:

$$\mathbf{T}_{1,2} = \mathbf{T}_{1,2'} \cdot \mathbf{T}_{2'2''} \cdot \mathbf{T}_{2''2} \quad (1.42)$$

A műveletek elvégzése után és az (1.39), (1.40), valamint az (1.41) egyenletek figyelembevételével kapjuk, hogy:

$$\mathbf{T}_{12} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & -\cos \psi \sin \phi - \sin \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \phi + \cos \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

Ismerve, hogy az (1.43) mátrix ortogonális, a  $\mathbf{T}_{1,2}$  inverz mátrixa a  $T_{2,1}$  mátrix, amely egyenlő a  $T_{1,2}$  transzponáltjával, vagyis:

$$\mathbf{T}_{21} = \mathbf{T}_{22''} \mathbf{T}_{2''2'} \mathbf{T}_{2'1} = \mathbf{T}_{1,2}^T = \mathbf{T}_{2''2}^T \mathbf{T}_{2'2''}^T \mathbf{T}_{12'}^T \quad (1.44)$$

$$\mathbf{T}_{21} = \begin{bmatrix} \cos \psi_i \cos \varphi_i - \sin \psi_i \cos \theta_i \sin \varphi_i & \sin \psi_i \cos \varphi_i + \cos \psi_i \cos \theta_i \sin \varphi_i & \sin \theta_i \sin \varphi_i \\ -\cos \psi_i \sin \varphi_i - \sin \psi_i \cos \theta_i \cos \varphi_i & -\sin \psi_i \sin \varphi_i + \cos \psi_i \cos \theta_i \cos \varphi_i & \sin \theta_i \cos \varphi_i \\ \sin \psi_i \sin \theta_i & -\cos \psi_i \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

**1.3.1. Az  $\omega_i$  szögsebesség és az  $\varepsilon_i$  szöggyorsulás-vektorkoordináták számítása az „i”-edik tag  $O_ix_iy_iz_i$  tehetetlenségi főirányaihoz viszonyítva.**

Ahhoz, hogy a mechanizmusokban fellépő tehetetlenségi erőket és ezek nyomatékait ki tudjuk számítani egy rögzített rendszerhez viszonyítva, előzőleg szükséges ezeket a tagok tehetetlenségi főirányaira épített koordináta-rendszerben kiszámítani.

Ha ismerjük a mechanizmust alkotó tagok tehetetlenségi főirányok rendszerének  $(\psi_i, \theta_i, \varphi_i)$  Euler-szögeit egy rögzített koordináta-rendszerben, és ezeknek első- és másodrendű deriváltjait, azaz a  $\dot{\psi}_i, \dot{\theta}_i, \dot{\varphi}_i$ , valamint a  $\ddot{\psi}_i, \ddot{\theta}_i, \ddot{\varphi}_i$  értékeket, akkor az (1.46) és (1.47) egyenletekkel meghatározhatók az  $\omega_{x_i}, \omega_{y_i}, \omega_{z_i}$  szögsebességek és az  $\varepsilon_{x_i}, \varepsilon_{y_i}, \varepsilon_{z_i}$  szöggyorsulások alkotói a központi tehetetlenségi főtengelyek által alkotott koordináta-rendszerekhez viszonyítva.

Jelen esetben a testhez rögzített  $O_i x_i^2 y_i^2 z_i^2$  koordináta-rendszer egybeesik a központi tehetetlenségi főtengelyek által alkotott koordináta-rendszerrel, ami a mechanizmusok dinamikai vizsgálata esetén nagyon lényeges szempont.

A térbeli vagy síkmozgást végző merev testnek pillanatnyi szögsebesség-vektora egy álló koordináta-rendszerben ugyanaz, függetlenül attól, hogy az Euler-szögek deriváltjaival vagy a térben mozgó testhez rögzített koordináta-rendszerhez viszonyított összetevőkkel fejezzük ki, azaz:

$$\bar{\omega}_i = \dot{\psi}_i + \dot{\theta}_i + \dot{\varphi}_i \quad (1.46)$$

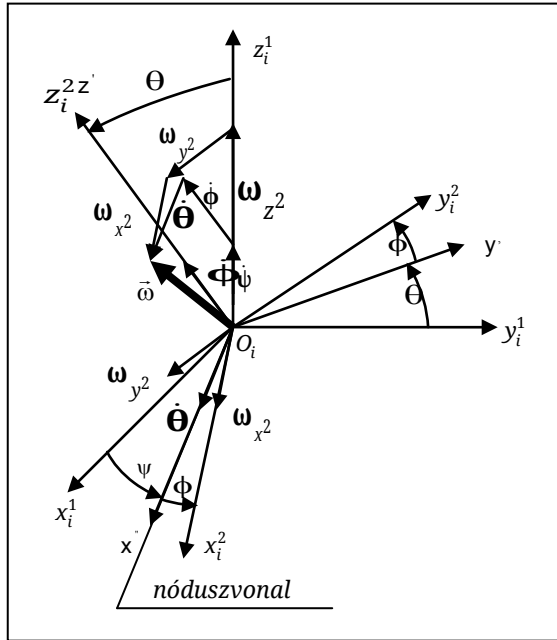
Az 1.12. ábra szerint az „i” sorszámú tag az  $O_i$  súlypontján áthaladó pillanatnyi forgástengely körül  $\omega_i$  pillanatnyi szögsebességű elemi elfordulást végez. Ezáltal a test központi tehetetlenségi főtengelyei az  $O_i x_i^1 y_i^1 z_i^1$  helyzetből az  $O_i x_i^2 y_i^2 z_i^2$  helyzetbe kerülnek.

A mozgó test egy álló koordináta-rendszerhez viszonyított pillanatnyi szögsebességének modulusza bármely koordináta-rendszerben ugyanaz, csak összetevői változnak. Ennek alapján felírhatjuk, hogy:

$$\mathbf{T}_{21} \cdot [\omega_i]^{(1)} = [\omega_i]^{(2)} = [\dot{\psi}_i]^{(2)} + [\dot{\theta}_i]^{(2)} + [\dot{\varphi}_i]^{(2)} \quad (1.47)$$

Az 1.12. ábra szerint az Euler-szögek deriváltjainak tartóegyenesei megegyeznek az  $o_i z_i^1, o_i x_i^{2''} = o_i x_i^{2'}$  illetve az  $o_i z_i^2$  tengelyekkel. A következőkben sorra kifejezzük az Euler-szögek vektorizált deriváltjait:

$$[\dot{\psi}_i]^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}_i \end{bmatrix} \quad (1.48)$$



1.12. ábra

Koordinátatranszformációt alkalmazunk az (1)-ből a (2)-be:

$$\underline{\dot{\psi}}_i^{(2)} = \mathbf{T}_{21} \underline{\dot{\psi}}_i^{(1)} \tag{1.49}$$

A műveletek elvégzése után kapjuk, hogy:

$$\underline{\dot{\psi}}_i^{(2)} = \begin{pmatrix} \dot{\psi}_i \sin \theta_i \sin \varphi_i \\ \dot{\psi}_i \sin \theta_i \cos \varphi_i \\ \dot{\psi}_i \cos \theta_i \end{pmatrix} \tag{1.50}$$

A  $\theta_i$  nutációs szögsebesség tartóegyenese az  $o_i x_i^{2''}$  tengely, tehát összetevői az  $O_i x_i^{2''} y_i^{2''} z_i^{2''}$  rendszerben a következők:

$$[\dot{\theta}_i]^{(2'')} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1.51}$$

A

$$[\dot{\theta}_i]^{(2)} = \mathbf{T}_{22''} \cdot [\dot{\theta}_i]^{(2'')} \tag{1.52}$$

képlettel írjuk át a (2)-es rendszerbe, ahol a  $\mathbf{T}_{22}''$  forgatómátrix a  $\varphi_i$  forgatószöggel való elfordulásnak felel meg, vagyis:

$$\mathbf{T}_{22}'' = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & \sin \varphi_i & 0 \\ -\sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

A műveleteket nem részletezve, az (1.52) és (1.53) egyenletekből következik, hogy:

$$[\dot{\theta}_i]^{(2)} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_i \cdot \cos \varphi_i \\ -\dot{\theta}_i \cdot \sin \varphi_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.54)$$

Végül a  $\varphi_i$  forgatószög deriváltjának tartóegyenese az  $o_i z_i^2$  tengelyen van, tehát összetevői az (1.12. ábra) alapján a következők:

$$[\dot{\varphi}_i]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_i \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

Az (1.50), (1.54) és az (1.55) egyenletek felhasználásával az (1.46) egyenlet a következőképpen alakul:

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_i} \\ \omega_{y_i} \\ \omega_{z_i} \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_i \cdot \sin \theta_i \cdot \sin \varphi_i + \dot{\theta}_i \cdot \cos \varphi_i \\ \dot{\psi}_i \cdot \sin \theta_i \cdot \cos \varphi_i - \dot{\theta}_i \cdot \sin \varphi_i \\ \dot{\psi}_i \cdot \cos \theta_i + \dot{\varphi}_i \end{bmatrix} \quad (1.56)$$

Az (1.56) képlet a térben mozgó test pillanatnyi szögsebesség-vektorának összetevői és az Euler-szögek, illetve ezek deriváltjai között teremt összefüggést. Ennek szorzatos-mátrixos alakját egyszerű észrevétel alapján azonnal felírhatjuk:

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_i} \\ \omega_{y_i} \\ \omega_{z_i} \end{bmatrix}^{(i)} = \begin{bmatrix} \sin \theta_i \cdot \sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 \\ \sin \theta_i \cdot \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & 0 \\ \cos \theta_i & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\psi}_i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{\varphi}_i \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

Az (1.57) egyenletben a bal oldal (2)-es indexét átírtuk  $i$ -re. Az (1.57) idő szerinti deriválásával kapjuk a szöggyorsulás-vektor összetevőit a tehetetlenségi fő tengelyek rendszeréhez viszonyítva:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x_i} \\ \varepsilon_{y_i} \\ \varepsilon_{z_i} \end{bmatrix}^{(i)} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_i \cdot \sin \theta_i \cdot \cos \varphi_i + \dot{\theta}_i \cdot \cos \theta_i \cdot \sin \varphi_i & -\dot{\varphi}_i \cdot \sin \varphi_i & 0 \\ -\dot{\varphi}_i \cdot \sin \theta_i \cdot \sin \varphi_i + \dot{\theta}_i \cdot \cos \theta_i \cdot \cos \varphi_i & -\dot{\varphi}_i \cdot \cos \varphi_i & 0 \\ -\dot{\theta}_i \cdot \sin \theta_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\psi}_i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{\varphi}_i \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \sin \theta_i \cdot \sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 \\ \sin \theta_i \cdot \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & 0 \\ \cos \theta_i & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\psi}_i \\ \ddot{\theta}_i \\ \ddot{\phi}_i \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

Amint a mechanikából tudjuk, a gyorsulásvektornak két összetevője van: az egyik a normálgyorsulás, amely a pálya görbülete miatt jelenik meg, a másik pedig a pályagyorsulás [28]. Az (1.58) egyenlet jobb oldalán levő összeg első tagja a normálgyorsulás, a második pedig a pályagyorsulás.

#### 1.4. A mechanizmusokban ható tehetetlenségi erők és nyomatékok redukálása egy rögzített koordináta-rendszerhez viszonyítva

Az  $i$ -edik tag tömegközéppontjára számított tehetetlenség vektorkettős a tehetetlenségi erőből és a tömegközéppontra számított tehetetlenségi forgatónyomatékból tevődik össze ([53], 378. old., illetve [46], 287–288. old.).

A tehetetlenségi erő oszlopmátrixa

$$\begin{bmatrix} F_{x_i} \\ F_{y_i} \\ F_{z_i} \end{bmatrix} = -m_i \begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \\ \ddot{z}_i \end{bmatrix}, \quad (1.59)$$

a tömegközéppontra redukált tehetetlenségi nyomaték pedig

$$\mathbf{M}_i^{(i)} = -\mathbf{J}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \mathbf{J}_i \boldsymbol{\omega}_i \quad (1.60)$$

Ha feltételezzük, hogy az „ $i$ ”-edik tag tömegközéppontjába helyezett  $O_{x_i y_i z_i}$  koordináta-rendszer tengelyei egybeesnek a tehetetlenségi főirányokkal, akkor az inercianyomaték-tenzor valamennyi centrifugális nyomatéka zérus értékű lesz. Ezáltal csak a tenzor főátlóelemei lesznek nullától különbözők, jelölje ezeket rendre  $J_{x_i}, J_{y_i}, J_{z_i}$ .

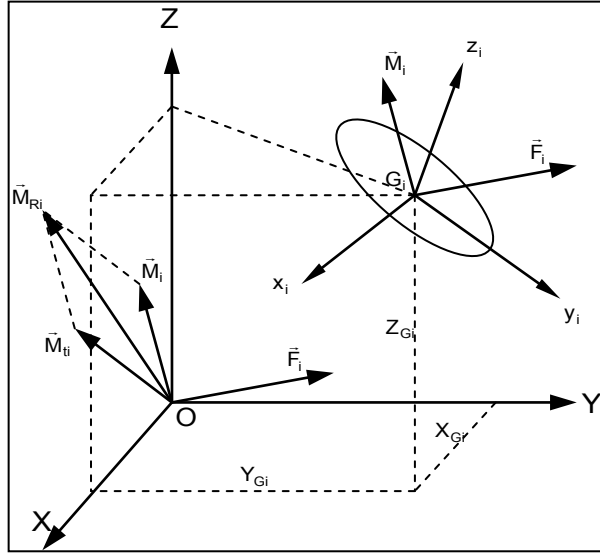
Ebben az esetben az (1.60) mátrixegyenlet kifejtett alakja a következő lesz:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i^{(i)} &= \begin{bmatrix} M_{x_i} \\ M_{y_i} \\ M_{z_i} \end{bmatrix}^{(i)} = \\ &= - \begin{bmatrix} J_{x_i} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y_i} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x_i} \\ \varepsilon_{y_i} \\ \varepsilon_{z_i} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_i} & \omega_{y_i} \\ \omega_{z_i} & 0 & -\omega_{x_i} \\ -\omega_{y_i} & \omega_{x_i} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{x_i} & 0 & 0 \\ 0 & J_{y_i} & 0 \\ 0 & 0 & J_{z_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{x_i} \\ \omega_{y_i} \\ \omega_{z_i} \end{bmatrix} \quad (1.61) \end{aligned}$$

A rögzített koordináta-rendszer  $O$  origójára számított vektorkettős az  $\mathbf{F}_i$  erőből és az  $\mathbf{M}_{R_i}$  nyomatékból áll. Az 1.13. ábrán szemléltetjük, hogy a 30

nyomatékvektornak két összetevője van: az egyik a tehetetlenségi forgatónyomaték, mely erőpárként értelmezhető, és ezáltal a tér bármely pontjában invariáns, a másik pedig a tömegközéppontban ható tehetetlenségi erővektor nyomatéka az  $O$ -ra:

$$\mathbf{M}_{Ri} = \mathbf{M}_i + \mathbf{M}_{ti} = \mathbf{M}_i + \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad (1.62)$$



1.13. ábra

Az  $\mathbf{M}_{ti}$  nyomaték 1.13. ábrán látható tengely vetületei a következő összefüggésekből határozhatók meg:

$$\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j} + z_i \mathbf{k} \quad (1.63)$$

$$\mathbf{F}_i = -m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -m_i (\ddot{x}_i \mathbf{i} + \ddot{y}_i \mathbf{j} + \ddot{z}_i \mathbf{k}) \quad (1.64)$$

$$\mathbf{M}_{ti} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = -m_i \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ \ddot{x}_i & \ddot{y}_i & \ddot{z}_i \end{bmatrix} \quad (1.65)$$

$$\begin{bmatrix} M_{tx_i} \\ M_{ty_i} \\ M_{tz_i} \end{bmatrix}^{(1)} = -m_i \begin{bmatrix} y_i \ddot{z}_i - z_i \ddot{y}_i \\ z_i \ddot{x}_i - x_i \ddot{z}_i \\ x_i \ddot{y}_i - y_i \ddot{x}_i \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

A tehetetlenségi össznyomaték számítására az OXYZ rögzített koordináta-rendszerben figyelembe kell vennünk, hogy a tehetetlenségi forgatónyomatékokot



1. ALKALMAZOTT MÁTRIXSZÁMÍTÁS

az „i”-edik tag tehetetlenségi főirányainak rendszerében számítottuk ki, így transzformációt kell alkalmaznunk:

$$\mathbf{M}_{Ri}^{(1)} = \mathbf{T}_{1i} \mathbf{M}_i^{(i)} + \mathbf{M}_{ti}^{(1)} \tag{1.67}$$

Az (1.66) egyenlet jobb oldalán található  $\mathbf{T}_{1i}$  forgatómátrix az  $i$ -edik tag súlypontjába helyezett  $O_i x_i y_i z_i$  központi tehetetlenségi fő tengelyek iránytényezőit tartalmazza az (1)-es, helytálló taghoz, azaz a géptörzshöz rögzített  $OXYZ$  koordináta-rendszerhez viszonyítva.

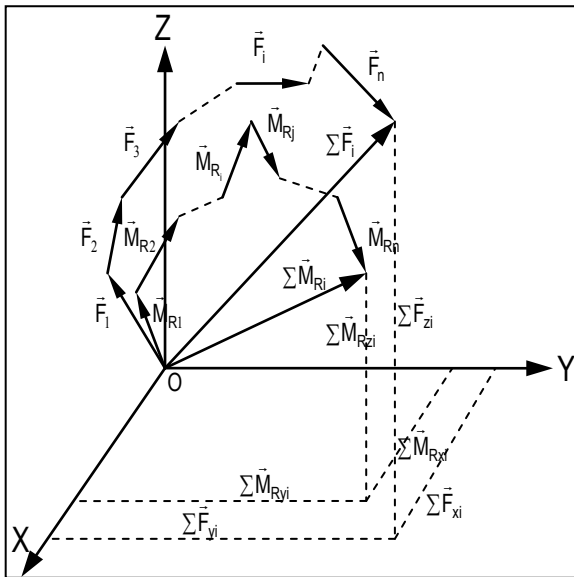
Feltételezzük, hogy az  $O_1$  pontra számított tehetetlenségi erők vektorkettőse  $n$  összetevőből áll (1.14. ábra).

A mechanizmus összes tagjára számított vektorkettősök a rögzített koordináta-rendszerhez viszonyítva az (1.59) és az (1.67) képletek szerint összegezhetők. Ezúton számítjuk ki a rendszerben ébredő tehetetlenségi erők és nyomatékok eredőit:

$$\mathbf{F}_Z = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad \text{és} \quad \mathbf{M}_Z = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{Ri} \tag{1.68}$$

Ezek kifejtett alakja a következő:

$$\underline{\mathbf{F}}_Z = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n F_{xi} \\ \sum_{i=1}^n F_{yi} \\ \sum_{i=1}^n F_{zi} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\mathbf{M}}_Z = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n M_{Rxi} \\ \sum_{i=1}^n M_{Ryi} \\ \sum_{i=1}^n M_{Rzi} \end{bmatrix} \tag{1.69}$$



1.14. ábra

### 1.5. Periodikus függvények Fourier-sorban való kifejtése [26]

Tekintsünk egy  $T = 2\pi T = 2\pi$  periódusú  $U = f(\varphi)$  periodikus függvényt, ahol  $U$  bármely fizikai mennyiség lehet. Jelen tanulmányban ez pozíció, sebesség, gyorsulás, erő vagy nyomaték, a  $\varphi$  változó pedig a mechanizmust működtető főtengely helyzetét meghatározó szög, azaz a továbbiakban *vezetőparaméter*.

Ismert, hogy az  $f(\varphi)$  periodikus függvény megközelíthető a következő trigonometrikus polinommal:

$$f(\varphi) = C_o + \sum_{k=1}^n A_k \cos k \varphi + \sum_{k=1}^n B_k \sin k \varphi, \quad (1.70)$$

ahol  $C_o$ ,  $A_k$  és  $B_k$  a trigonometrikus polinom Fourier-együtthatói, amelyeket a következő határozott integrálokkal számítanak ki:

$$C_o = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi;$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos k \varphi d\varphi;$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin k \varphi d\varphi \quad (1.71)$$

Figyelembe véve, hogy az  $f(\varphi)$  periodikus függvény általában a gépekben mozgó alkatrészek pozícióit, sebességeit, gyorsulásait írja le, vagy az ezeket terhelő tehetetlenségi erő és nyomatékvektorok koordinátáiból tevődik össze, javasolt a függvény numerikus módszerekkel való integrálása.

Egy  $y = f(x)$  általános alakban felírt, az  $[x_0, x_{2m}]$  intervallumon definiált függvény numerikus integrálása a Simpson-képlet szerint a következő:

$$\int_{x_0}^{x_{2m}} Y dX = \frac{h}{3} (Y_0 + 4Y_1 + Y_2) + \frac{h}{3} (Y_2 + 4Y_3 + Y_4) + \frac{h}{3} (Y_{2m-2} + 4Y_{2m-1} + Y_{2m}) \quad (1.72)$$

A számítások elvégzése után a képlet az alábbi módon strukturálható:

$$\int_{x_0}^{x_{2m}} Y dX = \frac{h}{3} [(Y_0 + Y_{2m}) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2], \quad (1.73)$$

ahol:

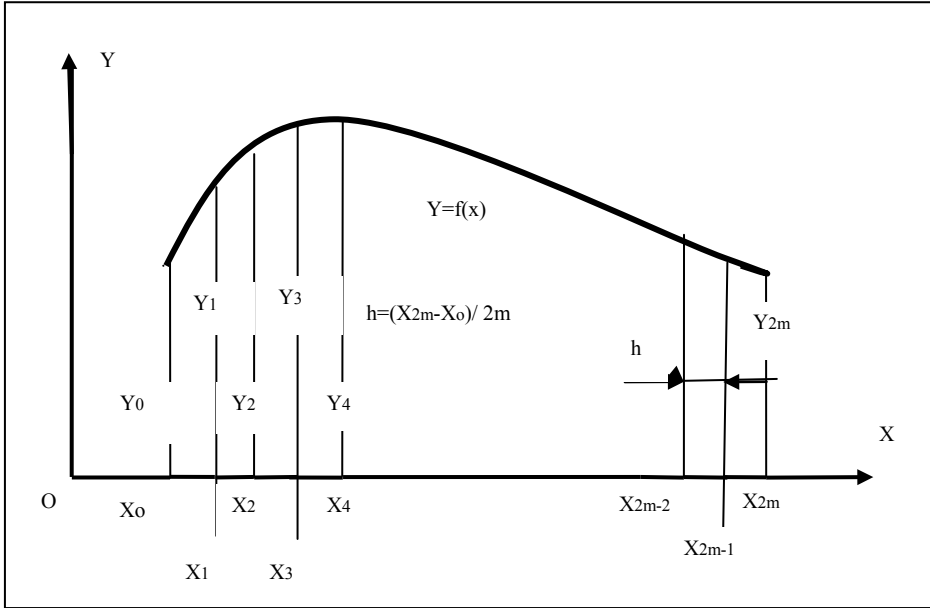
$$\sigma_1 = Y_1 + Y_3 + \dots + Y_{2m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} Y_{2i+1} \quad (1.74)$$

$$\sigma_2 = Y_2 + Y_4 + \dots + Y_{2m-2} = \sum_{i=0}^{m-2} Y_{2i+2} \quad (1.75)$$

$n = 2m$  a szakaszok,  $m$  pedig a páros számú szakaszok száma

1. ALKALMAZOTT MÁTRIXSZÁMÍTÁS

$h = \frac{X_{2m}-X_0}{2m}$  a felosztás mértéke,  $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_{2m}$  pedig a függvény értékei az  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_{2m}$  egyenközű pontokban.



1.15. ábra

Összehasonlítva az általános integrálási képletet a trigonometrikus sorozattal, a fenti esetekre felírhatók az alábbi összefüggések:

$X = \varphi,$

$X_0 = 0,$

$X_{2m} = 2\pi,$

$h = \frac{\pi}{m},$

$C_0$ -nak  $Y = f(\varphi), A_k$ -nak  $Y = f(\varphi) \cos k\varphi$  és  $B_k$ -nak pedig az  $Y = f(\varphi) \sin k\varphi$  felel meg.

Általában az  $U = f(\varphi)$  függvény értékei táblázat formában vannak megadva, azaz:

$\varphi$	0	$\pi/m$	$2\pi/m$	.....	$(2m-2)\pi/m$	$(2m-1)\pi/m$	$2\pi$
$f(\varphi)$	$U_0$	$U_1$	$U_2$	.....	$U_{2m-2}$	$U_{2m-1}$	$U_{2m}$

Következésképpen az  $A_k$  integrál kiszámításához szükséges értékekre felírható:

$$\begin{aligned} Y_0 &= U_0, \\ Y_{2m} &= U_{2m}, \\ \sigma_1 &= \sum_{i=0}^{m-1} U_{2i+1} \cos \left[ k \frac{\pi}{m} (2i+1) \right], \\ \sigma_2 &= \sum_{i=0}^{m-2} U_{2i+2} \cos \left[ k \frac{\pi}{m} (2i+2) \right], \end{aligned} \quad (1.76)$$

a  $B_k$  integrál kiszámításához pedig:

$$\begin{aligned} Y_0 &= 0, \\ Y_{2m} &= 0, \\ \sigma_1 &= \sum_{i=0}^{m-1} U_{2i+1} \sin \left[ k \frac{\pi}{m} (2i+1) \right], \\ \sigma_2 &= \sum_{i=0}^{m-2} U_{2i+2} \sin \left[ k \frac{\pi}{m} (2i+2) \right], \end{aligned} \quad (1.77)$$

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$A_k = C_k \sin \gamma_k, \quad B_k = C_k \cos \gamma_k, \quad (1.78)$$

ahol

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \gamma_k = \frac{A_k}{B_k}, \quad (1.79)$$

Az (1.78) kifejezések behelyettesítése után az (1.70) összefüggés a következő alakban írható:

$$f(\phi) = C_0 + \sum_{k=1}^n C_k \sin(k\phi + \gamma_k) \quad (1.80)$$

A  $C_k \sin(k\phi + \gamma_k)$  kifejezést a Fourier-sor  $k$ -ad rendű harmonikusának nevezik. Így például a  $C_1 \sin(\phi + \gamma_1)$  az elsőrendű, vagyis az alap-,  $C_2 \sin(2\phi + \gamma_2)$  pedig a Fourier-sor másodrendű harmonikus. Ezt a kifejezést úgy kell értelmezni, mint a  $C_k$  vektornak, amelynek modulusza  $C_k$ , a függőleges tengelyre való vetületét, amely  $\phi=0$  origónak megfelelően  $\gamma_k$  trigonometriai irányú fázisszöveget zár be a vízszintes tengellyel.

Természetesen feltevődik a kérdés, hogy mi lesz a  $C_0$  értékével? A  $C_0$  egy olyan állandó, amely az adott függvény aszimmetriáját fejezi ki. Ez az érték a középvonalat ábrázolja, vagyis a vízszintes tengellyel párhuzamos tengely

## 1. ALKALMAZOTT MÁTRIXSZÁMÍTÁS

helyzetét adja meg. A  $C_0$  értéke általában nagyon kicsi, ezt a gyakorlati tapasztalatok is igazolják. Emiatt a mérnöki gyakorlatban zérusnak tekintik, így nem veszik figyelembe. A gyakorlati jelentőség hiánya miatt nem tárgyalja a szakirodalom, de figyelembe véve az (1.76) és (1.77) képleteket, felírható, hogy:

$$\sigma_{10} = \sum_{i=0}^{m-1} U_{2i+1} \quad \sigma_{20} = \sum_{i=0}^{m-2} U_{2i+2} \quad (1.81)$$

Az (1.71) és (1.73) egyenlőségek figyelembevételével felírható, hogy:

$C_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{h}{3} [(Y_0 + Y_{2m}) + 4\sigma_{10} + 2\sigma_{20}]$ , ami az (1.76) és (1.81) képletek bevezetésével a következő alakot kapja:

$$C_0 = \frac{1}{6m} [(U_0 + U_{2m}) + 4 \sum_{i=0}^{m-1} U_{2i+1} + 2 \sum_{i=0}^{m-2} U_{2i+2}].$$

A trigonometrikus függvények esetében fennáll, hogy

$$U_0 = U_{2m}, \quad (1.82)$$

aminek figyelembevételével az (1.82) kifejezés tovább egyszerűsödik:

$$C_0 = \frac{1}{3m} [U_0 + 2 \sum_{i=0}^{m-1} U_{2i+1} + \sum_{i=0}^{m-2} U_{2i+2}], \quad (1.83)$$

Ugyanezt a logikát követve felírhatjuk az  $A_k$  és  $B_k$  számítási képleteit:

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{x_0}^{x_{2m}} Y dX = \frac{h}{3\pi} \cdot [(Y_0 + Y_{2m}) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2], \quad (1.84)$$

a (1.76) és (1.82) képlet figyelembevételével felírható:

$$A_k = \frac{h}{3\pi} [(Y_0 + Y_{2m}) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2] = \frac{1}{3m} [2Y_0 + 4\sigma_1 + 2\sigma_2] \quad (1.85)$$

azaz:

$$A_k = \frac{1}{3m} [2U_0 + 4\sigma_1 + 2\sigma_2] \quad (1.86)$$

$$A_k =$$

$$= \frac{1}{3m} \left[ 2U_0 + 4 \sum_{i=0}^{m-1} U_{2i+1} \cos \left[ k \frac{\pi}{m} (2i+1) \right] + 2 \sum_{i=0}^{m-2} U_{2i+2} \cos \left[ k \frac{\pi}{m} (2i+2) \right] \right] \quad (1.87)$$

Amennyiben tízfokos intervallumokra való felbontást alkalmazunk,  $k = 1$  és  $2m = 36$ , az első harmonikus pedig a következő:

$$A_1 = \frac{1}{54} \left[ 2U_0 + 4 \sum_{i=0}^{17} U_{2i+1} \cos \left[ \frac{\pi}{18} (2i + 1) \right] + 2 \sum_{i=0}^{16} U_{2i+2} \cos \left[ \frac{\pi}{18} (2i + 2) \right] \right] \quad (1.88)$$

A  $B_k$  kiszámítását az (1.77) kifejezések szerint végezzük,

$$B_k = \frac{1}{3m} \left[ 4 \sum_{i=0}^{m-1} U_{2i+1} \sin \left[ k \frac{\pi}{m} (2i + 1) \right] + 2 \sum_{i=0}^{m-2} U_{2i+2} \sin \left[ k \frac{\pi}{m} (2i + 2) \right] \right].$$

A gyakorlatban a harmonikusok közül csak az első kettőt használják. Hasonlóképpen meghatározható a  $B_1$  is:

$$B_1 = \frac{1}{54} \left[ 4 \sum_{i=0}^{17} U_{2i+1} \sin \left[ \frac{\pi}{18} (2i + 1) \right] + 2 \sum_{i=0}^{16} U_{2i+2} \sin \left[ \frac{\pi}{18} (2i + 2) \right] \right] \quad (1.89)$$

### 1.6. Jelölések

- $X_{Gi}, Y_{Gi}, Z_{Gi}$  az „i”-edik tag tömegközéppontjának koordinátái a rögzített OXYZ rendszerben;
- $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \psi_i, \theta_i, \varphi_i$  a  $G_i x_i y_i z_i$  központi tehetetlenségi fő tengelyek forgásszögei a rögzített OXYZ rendszerhez viszonyítva;
- $\alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*$  az  $O_i^* X_i^* Y_i^* Z_i^*$  segédrendszer forgásszögei a rögzített OXYZ rendszerhez viszonyítva;
- $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \gamma_{3i}$  a  $G_i x_i y_i z_i$  központi tehetetlenségi fő tengelyeknek a rögzített OXYZ rendszer tengelyeivel alkotott iránytényezői;
- $\alpha_{1i}^0, \alpha_{2i}^0, \dots, \gamma_{3i}^0$  a segédrendszer tengelyeinek a központi  $G_i x_i y_i z_i$  tehetetlenségi fő tengelyek rendszeréhez viszonyított iránytényezői;
- $b_{11i}, b_{21i}, b_{31i}$  az  $O_i^* X_i^* Y_i^* Z_i^*$  segédrendszer  $O_i^* X_i^*$  tengelyének a rögzített OXYZ rendszer tengelyeivel alkotott iránytényezői;
- $b_{13i}, b_{23i}, b_{33i}$  az  $O_i^* X_i^* Y_i^* Z_i^*$  segédrendszer  $O_i^* Z_i^*$  tengelyének a rögzített OXYZ rendszer tengelyeivel alkotott iránytényezői;
- a az  $O_i^* X_i^* Y_i^* Z_i^*$  és az  $O_j^* X_j^* Y_j^* Z_j^*$  segédrendszerek origói között mért távolság, az egymás meghosszabbításában elhelyezkedő tengelyek irányában;
- $x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}$  az „i” taghoz tartozó  $O_i^* X_i^* Y_i^* Z_i^*$  rendszer origójának koordinátái a központi  $G_i x_i y_i z_i$  tehetetlenségi fő tengely-koordináta-rendszerben;

## 1. ALKALMAZOTT MÁTRIXSZÁMÍTÁS

- $\dot{a}, \ddot{a}$  az  $O_j^* X_j^* Y_j^* Z_j^*$  segédrendszer origójának az  $O_i^* X_i^* Y_i^* Z_i^*$  rendszerhez viszonyított relatív sebessége és gyorsulása;
- $\dot{\alpha}_{1i}, \dot{\alpha}_{2i}, \dots, \dot{\gamma}_{3i}, \ddot{\alpha}_{1i}, \ddot{\alpha}_{2i}, \dots, \ddot{\gamma}_{3i}$  a  $G_i x_i y_i z_i$  központi tehetetlenségi főtengeleknek a rögzített OXYZ rendszer tengelyeivel alkotott irányítványozóinak első- és másodrendű deriváltjai;
- $\phi_{x1}, \phi_{x2}, \dots, \phi_{z2}$  az  $x, y, z$  tengelyekre, (1)-es és (2)-es síkokban elhelyezett kiegyensúlyozó tömegek fázisszögei;
- $F_{x1}, F_{x2}, F_{y1}, F_{y2}, \dots, F_{z1}, F_{z2}$  az  $x, y, z$  tengelyekre helyezett kiegyensúlyozó tömegek által kifejtett centrifugális erők, az (1)-es és (2)-es síkoknak megfelelően;
- $Q_1, R_1, Q_2, R_2$  az  $F_{x1}, F_{x2}$  kiegyensúlyozó erők alkotói, amelyek OY és OZ tengelyek irányában hatnak;
- $S_1, T_1, S_2, T_2$  az  $F_{y1}, F_{y2}$  kiegyensúlyozó erők alkotói, amelyek OX és OZ tengelyek irányában hatnak;
- $U_1, V_1, U_2, V_2$  az  $F_{z1}, F_{z2}$  kiegyensúlyozó erők alkotói, amelyek OX és OY tengelyek irányában hatnak;
- $A_x, B_x, \dots, A_y, B_y$  a gép rezgését okozó tehetetlenégi erők nyomatókai, a kiegyensúlyozó erők, valamint ezek nyomatókainak terhelését elviselő gép súlypontjának elmozdulását közelítő Fourier-sor első harmonikusának együtthatói;
- $A_{px0}, B_{px0}, \dots, B_{pz0}$  a kiegyensúlyozatlan gépen választott  $p$  pont elmozdulását közelítő Fourier-sor első harmonikusának együtthatói;
- $A_{px}, B_{px}, \dots, B_{pz}$  a kiegyensúlyozott gépen választott  $p$  pont elmozdulását közelítő Fourier-sor első harmonikusának együtthatói.

## 2. A KINEMATIKAI PÁROK KÉNYSZEREGYENLETEI

### 2.1. Alapelvek

Egy test helyzetét a térben hat általánosított koordináta határozza meg. Legyen ezek közül három az  $i$ -edik test tömegközéppontjának  $X_{Gi}, Y_{Gi}, Z_{Gi}$  koordinátái, a másik három pedig a központi tehetetlenségi főtengelyek  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  szögei, egy tet-szés szerint felvett  $OXYZ$  rögzített koordináta-rendszerhez viszonyítva úgy, ahogy azt az 1.1. alfejezetben értelmeztük és az 1.5. ábrán feltüntettük. A 2.1. ábrán két, az  $i$ -edik és a  $j$ -edik test van feltüntetve. Magától érthető, hogy az utóbbinak helyzetét az  $X_{Gj}, Y_{Gj}, Z_{Gj}$ , illetve az  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  általánosított koordináták határozzák meg.

A csomópontok módszerének – amit a következőkben részletesen tárgyalunk – lényege a kinematikai párt alkotó két test, darabonként hat általános koordinátájának meghatározása, figyelembe véve a kinematikai elemek által bevitt kényszereket, valamint a kényszerek felírásához szükséges egyenletek, a kényszeregyenletek meghatározása. Ha ezt az elvet a mechanizmus összes tagjára kiterjesztjük, a kinematikai párok kényszeregyenleteiből nemlineáris egyenletrendszert kapunk.

Ebben a kérdésben a megoldandó alapvető probléma a különböző osztályú csuklók által bevitt kényszerek analitikus felírása. A kényszeregyenletek száma a csukló fajtájától függ. A továbbiakban csak alsórendű kinematikai párokkal foglalkozunk.

Legyen a 2.1. ábra szerinti „ $i$ ” és „ $j$ ” egy térbeli mechanizmus hengeres, forgó, csúszka-, gömb-, egyetemes vagy menetes csuklóval kapcsolt két tagja.

Tekintsük a tagokhoz tartozó  $\Delta_i$  és  $\Delta_j$  egyeneseket. Kezdetben a  $\Delta_i$  és  $\Delta_j$  egyenesek egybeesnek. A hengeres csukló esetében a kinematikai pár elemei két független mozgást végezhetnek egymáshoz viszonyítva, egy  $\Delta_i \equiv \Delta_j$  körüli forgómozgást, valamint egy, a tengelyek irányát követő csúszómozgást. Belátható, hogy ebben az esetben a hengeres csukló kényszereinek száma négy.

A forgó, illetve a csúszó csuklók esetében csak egy független mozgás marad, és pedig a forgó-, illetve a haladó mozgás, tehát a kényszerek száma ötre emelkedik.

A gömbcsukló esetében a két elem egymáshoz viszonyított eltolása akadályozott, a forgások nem. Vegyük észre, hogy ebben az esetben a  $\Delta_i$  és  $\Delta_j$  egyenesek általában a gömb középpontjában metszik egymást. A tagok szabad forgásai e



## 2. A KINEMATIKAI PÁROK KÉNYSZEREGYENLETEI



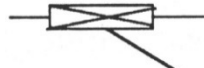
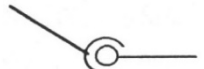

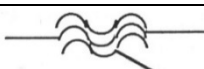
pont körül tehetők meg. Ebből következik, hogy a gömbcsukló kényszereinek száma három.

A menetes csukló esetében is létezik egy forgó- és egy haladó mozgás, de ezek nem függetlenek. Így ebben az esetben is a kényszerek száma öt.

Az egytetemes vagy csapos gömbcsukló esetében a  $\Delta_i$  és  $\Delta_j$  tengelyek egymásra merőlegesek maradnak és ezáltal kardánkeresztet hoznak létre, a metszéspontjuk pedig a kinematikai pár közös pontja. A  $\Delta_i$  és  $\Delta_j$  egyenesek körül lehetséges két, egymástól független forgómozgás, tehát a kardánkereszt negyedosz-tályú kinematikai pár.

A fentebb elemzett kinematikai párokat a 2.1. táblázatban foglaltuk össze, ahol a *kizárt, illetve meghagyott mozgások számát is feltüntettük.*

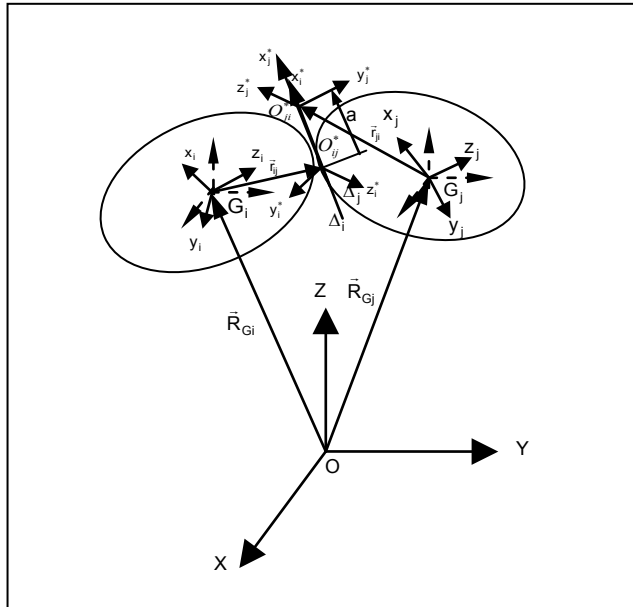
2.1. táblázat

Osz-tály	Típus	Szimbólum	Kizárt	Megha-gyott
1	henger alakú csukló		4	2
2	forgó csukló		5	1
3	csúszka		5	1
4	gömbcsukló		3	3
5	egytetemes csukló		4	2
6	menetes csukló		5	1

Levonható a következtetés, miszerint a kinematikai pároknak vagy egyetlen jellemző közös tengelye (1, 2, 3, 6), vagy pedig egyetlen jellemző közös pontja (4, 5) van.

A statikai meghatározottság feltételének csak úgy lehet eleget tenni, ha a kényszeregyenletek száma egyenlő a kizárt mozgások számával.

A 2.1. ábrán látható „i” és „j” jelölésű testek az előbbieken bemutatott kinematikai párok egyikével vannak összekapcsolva, így ennek alapján levezethető az alsó osztályú kinematikai párok összes esete. A két központi tehetetlenségi főtengeletrendszer a hat-hat általános koordinátával egy rögzített OXYZ rendszerhez viszonyítjuk. Itt az  $R_{Gi}(X_{Gi}, Y_{Gi}, Z_{Gi})$  és  $R_{Gj}(X_{Gj}, Y_{Gj}, Z_{Gj})$  a két test súlypontjának koordinátái, az  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  és  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  az OXYZ rögzített rendszerhez viszonyított központi tehetetlenségi főtengek helyzetszögei.



2.1. ábra

Az „i” testhez tartozó  $O_{ij}^*$  pont helyzetét az  $\mathbf{r}_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$  helyvektorral adjuk meg a  $G_i x_i y_i z_i$  rendszerben. Hasonlóképpen, a „j” testhez tartozó  $O_{ji}^*$  pont helyzetét a  $G_j x_j y_j z_j$  rendszerben az  $\mathbf{r}_{ji}(x_{ji}, y_{ji}, z_{ji})$  helyvektorral jelöljük. Az  $x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}$  koordinátákat csak azután határozzuk meg, miután meghatároztuk a  $G_i x_i y_i z_i$  központi tehetetlenségi főtengelet helyzetét a munkadarab műhelyrajzán feltüntetett méretek szerint.

Az „i” és „j” testekhez tartozó  $O_{ij}^* x_i^* y_i^* z_i^*$  és  $O_{ji}^* x_j^* y_j^* z_j^*$  segédrendszerek helyzetét az  $\alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*$  és  $\alpha_j^*, \beta_j^*, \gamma_j^*$  forgásszögekkel adjuk meg az OXYZ rögzített rendszerhez viszonyítva.

Az „i” és „j” testekhez rögzített  $O_{ij}^*x_i^*y_i^*z_i^*$  és  $O_{ji}^*x_j^*y_j^*z_j^*$  segédrendszereket úgy állítottuk be, hogy a hengeres, csúszó, forgó vagy menetes csuklók  $O_{ij}^*x_i^*$  és  $O_{ji}^*x_j^*$  kinematikai (azaz forgás- vagy lineáris elmozdulási) tengelyei egybeessenek (2.1. ábra).

A segédrendszerek  $O_{ij}^*$  és  $O_{ji}^*$  origói a közös  $\Delta_i \equiv \Delta_j$  tengelyen helyezkednek el. A hengeres, csúszó és csavarmenetes csuklókkal kapcsolt tagok egymáshoz viszonyított, azaz relatív haladó mozgást is végeznek, tehát az „a” paraméter változó. Ezzel ellentétben a forgó, gömb- és az egytetemes csukló esetén a kapcsolt tagok nem csúsznak el egymáshoz viszonyítva, ennél fogva az „a” paraméter állandó.

Az előbbieken ismertetett kényszer típusok, valamint a kinematikai párok geometriájának sajátosságai (relatív elfordulás, relatív elcsúszás vagy relatív elfordulás-csúszás) következtében az  $i$  és  $j$  tagok segédrendszereinek tengelyei, egymáshoz viszonyítva, sajátos módon mozdulnak el. Ezt matematikailag úgy lehet megfogalmazni, hogy az alábbi összefüggések közül legalább egynek teljesülnie kell. A kényszer típusától függően teljesülhet kettő vagy mindhárom:

$$\begin{aligned}\alpha_i^* &= \alpha_j^* \\ \beta_i^* &= \beta_j^* \\ \gamma_i^* &= \gamma_j^*\end{aligned}\tag{2.1}$$

A 2.1. ábra alapján felírható a következő vektoregyenlet:

$$\mathbf{R}_{Gi} + \mathbf{r}_{ij} + \mathbf{a} - \mathbf{R}_{Gj} - \mathbf{r}_{ji} = 0\tag{2.2}$$

A pontosítás végett nevesítjük az egyenlet bal oldalán szereplő tagokat:

- $\mathbf{R}_{Gi}$  – az  $i$ -edik tag tömegközéppontjának helyvektora a helytálló OXYZ koordináta-rendszerben;
- $\mathbf{r}_{ij}$  – az  $i$ -edik tag segédrendszerének  $O_{ij}^*$  origója, a  $G_i$  tömegközéppontjába helyezett fő tehetetlenségi rendszeréhez képest;
- $\mathbf{a}$  – a  $j$ -edik tag segédrendszer origójának helyvektora az  $i$ -edik tag segédrendszerének origójához viszonyítva;
- $\mathbf{R}_{Gj}$  – a  $j$ -edik tag tömegközéppontjának helyvektora a helytálló OXYZ koordináta-rendszerben;
- $\mathbf{r}_{ji}$  – a  $j$ -edik tag segédrendszerének  $O_{ji}^*$  origója, a  $G_j$  tömegközéppontjába helyezett fő tehetetlenségi rendszeréhez képest.

A (2.2) vektorsokszög OXYZ rögzített rendszerhez viszonyított alkotói a következő mátrixegyenletbe vonhatók össze:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \cos \alpha_{1i} & \cos \beta_{1i} & \cos \gamma_{1i} & X_{Gi} \\ \cos \alpha_{2i} & \cos \beta_{2i} & \cos \gamma_{2i} & Y_{Gi} \\ \cos \alpha_{3i} & \cos \beta_{3i} & \cos \gamma_{3i} & Z_{Gi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} b_{11i} \\ b_{21i} \\ b_{31i} \\ 0 \end{bmatrix} - \\
& - \begin{bmatrix} \cos \alpha_{1j} & \cos \beta_{1j} & \cos \gamma_{1j} & X_{Gj} \\ \cos \alpha_{2j} & \cos \beta_{2j} & \cos \gamma_{2j} & Y_{Gj} \\ \cos \alpha_{3j} & \cos \beta_{3j} & \cos \gamma_{3j} & Z_{Gj} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ji} \\ y_{ji} \\ z_{ji} \\ 1 \end{bmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{2.3}$$

A (2.3) egyenletben a  $G_i x_i y_i z_i$  és  $G_j x_j y_j z_j$  tehetetlenségi főirány-rendszerekből az álló koordináta-rendszerbe transzformáló homogén mátrixok rotációs részét  $\mathbf{T}_{1i}$ -vel, illetve  $\mathbf{T}_{1j}$ -vel jelöljük; a  $b_{11i}$ ,  $b_{21i}$ , és a  $b_{31i}$  együtthatók pedig az  $O_{ij}^* X_i^*$  tengely irányítványozói az OXYZ rendszerhez viszonyítva.

A fentebb elmondottak alapján felírhatjuk, hogy:

$$\begin{bmatrix} b_{11i} \\ b_{21i} \\ b_{31i} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{1i}^* \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

ahol  $\mathbf{T}_{1i}^*$  az  $i$ -edik tag segédrendszerét a helyálló rendszerbe transzformáló homogén mátrix rotációs része:

$$\mathbf{T}_{1i}^* = \begin{bmatrix} b_{11i} & b_{12i} & b_{13i} \\ b_{21i} & b_{22i} & b_{23i} \\ b_{31i} & b_{32i} & b_{33i} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

A (2.5) mátrix elemei az (1.39) képletekkel számított iránykoszinuszok, melyek részletesen kifejtett alakjai a következők:

$$\begin{aligned}
b_{11i} &= \cos \beta_i^* \cos \gamma_i^* \\
b_{21i} &= \sin \alpha_i^* \sin \beta_i^* \cos \gamma_i^* + \cos \alpha_i^* \sin \gamma_i^* \\
b_{31i} &= -\cos \alpha_i^* \sin \beta_i^* \cos \gamma_i^* + \sin \alpha_i^* \sin \gamma_i^* \\
b_{12i} &= -\cos \beta_i^* \sin \gamma_i^* \\
b_{22i} &= -\sin \alpha_i^* \sin \beta_i^* \sin \gamma_i^* + \cos \alpha_i^* \cos \gamma_i^* \\
b_{32i} &= \cos \alpha_i^* \sin \beta_i^* \sin \gamma_i^* + \sin \alpha_i^* \cos \gamma_i^* \\
b_{13i} &= \sin \beta_i^* \\
b_{23i} &= -\sin \alpha_i^* \cos \beta_i^* \\
b_{33i} &= \cos \alpha_i^* \cos \beta_i^*
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Hasonlóképpen, rendre azonosíthatók a (2.3) egyenlet forgatómátrixaiban szereplő iránytényezők is, ha a (2.6) képletekbe rendre bevezetjük az  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  forgásszögeket, annak érdekében, hogy az egyenletet a tehetetlenségi főirányok rendszeréhez kössük. A számítások elvégzése után kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha_{1i} &= \cos \beta_i \cdot \cos \gamma_i \\
 \cos \alpha_{2i} &= \sin \alpha_i \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i \\
 \cos \alpha_{3i} &= -\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \gamma_i \\
 \cos \beta_{1i} &= -\cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i \\
 \cos \beta_{2i} &= -\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \cos \gamma_i \\
 \cos \beta_{3i} &= \cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i \\
 \cos \gamma_{1i} &= \sin \beta_i \\
 \cos \gamma_{2i} &= -\sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i \\
 \cos \gamma_{3i} &= \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Az  $O_{ij}^* X_i^* Y_i^* Z_i^*$  segédrendszer és  $G_i x_i y_i z_i$  tehetetlenségi főtengely koordináta-rendszere közötti transzformációs mátrix forgató *almátrixa* a  $\mathbf{T}_{ii^*}$ :

$$\mathbf{T}_{ii^*} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{1i}^0 & \cos \beta_{1i}^0 & \cos \gamma_{1i}^0 \\ \cos \alpha_{2i}^0 & \cos \beta_{2i}^0 & \cos \gamma_{2i}^0 \\ \cos \alpha_{3i}^0 & \cos \beta_{3i}^0 & \cos \gamma_{3i}^0 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

A mai számítógépes rajzolóprogramokkal segített tervezési környezetben (AutoCAD vagy más, hasonló rendeltetésű szoftver) a tehetetlenségi főtengelyek segédrendszerhez viszonyított iránytényezői gombnyomásra leolvashatók, így a  $\mathbf{T}_{i^*i}$  mátrix már a rajz elkészítésének pillanatában ismert. Mivel a tehetetlenségi főtengelyek ortogonális rendszert alkotnak, felírható, hogy:

$$\mathbf{T}_{i^*i}^T = \mathbf{T}_{ii^*} \tag{2.9}$$

A segédrendszer  $O_{ij}^* x_i^*$  tengelyének iránytényezői a  $G_i x_i y_i z_i$  tehetetlenségi fő-tengely koordináta-rendszeréhez viszonyítva a következők:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha_{1i}^0 \\ \cos \alpha_{2i}^0 \\ \cos \alpha_{3i}^0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{ii^*} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Ugyanazon egységvektor iránytényezőit az OXYZ rögzített rendszerhez viszonyítva a következőképpen írhatjuk fel:

$$\mathbf{T}_{1i^*} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11i} \\ b_{21i} \\ b_{31i} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{1i} \mathbf{T}_{ii^*} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{1i} \begin{bmatrix} \cos \alpha_{1i}^0 \\ \cos \alpha_{2i}^0 \\ \cos \alpha_{3i}^0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Behelyettesítve a (2.3) mátrixegyenletben szereplő  $\mathbf{T}_{1i}$  mátrix tagjait a (2.11) mátrixegyenletbe, a műveletek elvégzése után a segédrendszer  $O_{ij}^* x_i^* z_i^*$  tengelyének iránytényezői a következők lesznek:

$$\begin{bmatrix} b_{11i} \\ b_{21i} \\ b_{31i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{1i} \cos \alpha_{1i}^0 + \cos \beta_{1i} \cos \alpha_{2i}^0 + \cos \gamma_{1i} \cos \alpha_{3i}^0 \\ \cos \alpha_{2i} \cos \alpha_{1i}^0 + \cos \beta_{2i} \cos \alpha_{2i}^0 + \cos \gamma_{2i} \cos \alpha_{3i}^0 \\ \cos \alpha_{3i} \cos \alpha_{1i}^0 + \cos \beta_{3i} \cos \alpha_{2i}^0 + \cos \gamma_{3i} \cos \alpha_{3i}^0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Ha a (2.7) egyenletekkel kifejezett tehetetlenségi főtengelyek iránytényezőit behelyettesítjük a (2.12) mátrixegyenletbe, a (2.6) kifejezések figyelembevételével sorra felírhatjuk az  $O_{ij}^* x_i^* y_i^* z_i^*$  segédrendszer tengelyeinek a rögzített OXYZ koordináta-rendszer tengelyeivel alkotott iránytényezőit. Ezek a következők:

$$b_{11i} = \cos \beta_i^* \cos \gamma_i^* = \cos \beta_i \cos \gamma_i \cos \alpha_{1i}^0 - \cos \beta_i \sin \gamma_i \cos \alpha_{2i}^0 + \sin \beta_i \cos \alpha_{3i}^0 \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} b_{21i} &= \sin \alpha_i^* \cdot \sin \beta_i^* \cdot \cos \gamma_i^* + \cos \alpha_i^* \cdot \sin \gamma_i^* = \\ &= \left( \sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cos \gamma_i + \right. \\ &\quad \left. + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i \right) \cdot \cos \alpha_{1i}^0 + \\ &\quad + (-\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \cos \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{2i}^0 - \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i \cdot \cos \alpha_{3i}^0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} b_{31i} &= -\cos \alpha_i^* \cdot \sin \beta_i^* \cdot \cos \gamma_i^* + \sin \alpha_i^* \cdot \sin \gamma_i^* = \\ &= (-\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{1i}^0 + \\ &\quad + (\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{2i}^0 + \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i \cdot \cos \alpha_{3i}^0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} b_{12i} &= -\cos \beta_i^* \sin \gamma_i^* = \cos \beta_i \cdot \cos \gamma_i \cdot \cos \beta_{1i}^0 - \cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i \cdot \cos \beta_{2i}^0 + \\ &\quad + \sin \beta_i \cdot \cos \beta_{3i}^0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} b_{22i} &= -\sin \alpha_i^* \sin \beta_i^* \cdot \sin \gamma_i^* + \cos \alpha_i^* \cos \gamma_i^* = \\ &= \sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) \cdot \cos \beta_{1i}^0 + \\ &\quad + (-\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) \cdot \cos \beta_{2i}^0 - \\ &\quad - \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i \cdot \cos \beta_{3i}^0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} b_{32i} &= -\cos \alpha_i^* \sin \beta_i^* \cdot \cos \gamma_i^* + \sin \alpha_i^* \sin \gamma_i^* = \\ &= (-\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) \cdot \cos \beta_{1i}^0 + \\ &\quad + (\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) \cdot \cos \beta_{2i}^0 + \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i \cdot \cos \beta_{3i}^0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

## 2. A KINEMATIKAI PÁROK KÉNYSZEREGYENLETEI

$$b_{13i} = \sin \beta_i^* = \cos \beta_i \cdot \cos \gamma_i \cdot \cos \gamma_{1i}^0 - \cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i \cdot \cos \gamma_{2i}^0 + \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_{3i}^0 \quad (2.19)$$

$$b_{23i} = -\sin \alpha_i^* \cdot \cos \beta_i^* = (\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) \cdot \cos \gamma_{1i}^0 + \\ + (-\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) \cdot \cos \gamma_{2i}^0 - \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i \cdot \cos \gamma_{3i}^0 \quad (2.20)$$

$$b_{33i} = \cos \alpha_i^* \cdot \cos \beta_i^* = (-\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) \cdot \cos \gamma_{1i}^0 + \\ + (\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) \cdot \cos \gamma_{2i}^0 + \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i \cdot \cos \gamma_{3i}^0 \quad (2.21)$$

Hasonlóképpen írhatók fel a „j” taghoz tartozó segédrendszer iránytényezői is az OXYZ rögzített rendszerhez viszonyítva.

Figyelembe véve a (2.7), (2.13), (2.14) és (2.15) összefüggéseket, kapjuk a (2.3) mátrixegyenletnek megfelelő, a koordinátákban lineáris egyenletrendszert, amikor az  $O_{ij}^* x_i^*$  és az  $O_{ji}^* x_j^*$  tengelyek egybeesnek:

$$X_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \gamma_i - y_{ij} \cdot \cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \sin \beta_i + \\ + a \cdot [\cos \beta_i \cdot \cos \gamma_i \cdot \cos \alpha_{1i}^0 - \cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i \cdot \cos \alpha_{2i}^0 + \sin \beta_i \cdot \cos \alpha_{3i}^0] - \\ - X_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \cos \beta_j \cdot \sin \gamma_j - z_{ji} \cdot \sin \beta_j = 0$$

$$Y_{Gi} + x_{ij} \cdot (\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + \\ + y_{ij} \cdot (-\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) - z_{ij} \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i + \\ + a \cdot \left[ \begin{array}{l} (\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{1i}^0 + \\ + (-\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{2i}^0 - \\ - \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i \cdot \cos \alpha_{3i}^0 \end{array} \right] - Y_{Gj} - \\ - x_{ji} \cdot (\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - \\ y_{ji} \cdot (-\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) + z_{ji} \cdot \sin \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0$$

$$Z_{Gi} + x_{ij} \cdot (-\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + \\ + y_{ij} \cdot (\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) + z_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i + \\ + a \cdot \left[ \begin{array}{l} (-\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{1i}^0 + \\ + (\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{2i}^0 + \\ + \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i \cdot \cos \alpha_{3i}^0 \end{array} \right] - Z_{Gj} - \\ x_{ji} \cdot (-\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - \\ y_{ji} \cdot (\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \cos \gamma_j) - z_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0 \quad (2.22)$$

## 2.2. A kinematikai párok kényszer egyenletei az $O_{ij}^*x_i^*$ és az $O_{ji}^*x_j^*$ tengelyek egybeesése esetén

### 2.2.1. A henger alakú csukló esete

A henger alakú csukló egy forgómozgást enged meg  $O_{ij}x_i^*$  tengely körül, és egy csúszómozgást e tengely mentén (2.2. ábra). Az első három kényszer egyenletet a (2.22) kifejezések adják, ezekhez hozzá kell rendelni még két feltételt a (2.1) egyenlőségekből a (2.13), (2.14), vagy a (2.15) egyenletek szerint, azaz:

$$\begin{aligned} X_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \gamma_i - y_{ij} \cdot \cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \sin \beta_i + \\ + a \cdot [\cos \beta_i \cdot \cos \gamma_i \cdot \cos \alpha_{1i}^0 - \cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i \cdot \cos \alpha_{2i}^0 + \sin \beta_i \cdot \cos \alpha_{3i}^0] - \\ - X_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \cos \beta_j \cdot \sin \gamma_j - z_{ji} \cdot \sin \beta_j = 0 \end{aligned}$$

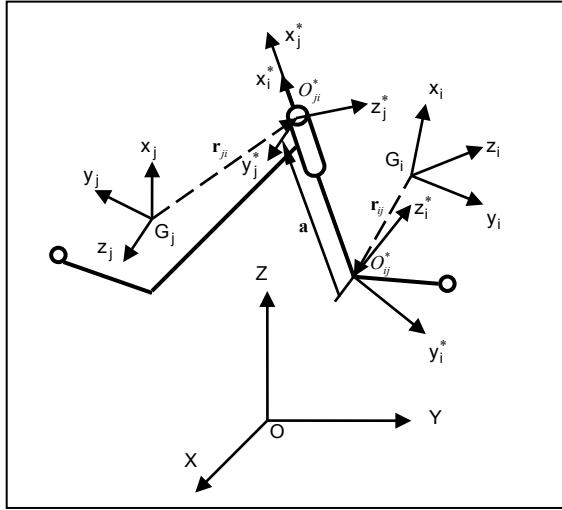
$$\begin{aligned} Y_{Gi} + x_{ij} \cdot (\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + \\ - y_{ij} \cdot (-\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) - z_{ij} \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i + \\ + a \cdot \left[ \begin{array}{c} (\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{1i}^0 + \\ + (-\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{2i}^0 - \\ - \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i \cdot \cos \alpha_{3i}^0 \end{array} \right] - Y_{Gj} - \\ - x_{ji} \cdot (\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - \\ - y_{ji} \cdot (-\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) + z_{ji} \cdot \sin \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{Gi} + x_{ij} \cdot (-\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + \\ + y_{ij} \cdot (\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) + z_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i + \\ + a \cdot \left[ \begin{array}{c} (-\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{1i}^0 + \\ + (\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{2i}^0 + \\ + \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i \cdot \cos \alpha_{3i}^0 \end{array} \right] - \\ - Z_{Gj} - x_{ji} \cdot (-\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - \\ - y_{ji} \cdot (\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \cos \gamma_j) - z_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0 \end{aligned}$$

$$b_{11i} = b_{11j}$$

$$b_{31i} = b_{31j} \tag{2.23}$$





2.2. ábra

### 2.2.2. A forgó csukló esete

A forgó csukló a két tag között egyetlen, jelen esetben az  $O_{ij}x_i^*$  tengely körüli forgómozgást enged meg. Az első három egyenletet a (2.22) rendszer adja, ahol „a” egy tetszőlegesen választható állandó értékű helyvektor. A két segédkoordináta origójának egybeesésekor, vagyis ha  $O_{ij}^* \equiv O_{ji}^*$ , az „a” paraméter zérus értékű, és ezáltal a (2.22) egyenletrendszer leegyszerűsödik.

Az  $O_{ij}x_i^*$  tengelyre felírt rendszer esetén a két tag  $O_{ij}x_i^* = O_{ji}x_j^*$  tengely körül fordul el, illetve  $\alpha_i^* \neq \alpha_j^*$ . Az egytengelyűség feltételét  $\beta_i^* = \beta_j^*$  és  $\gamma_i^* = \gamma_j^*$  forgászögek közötti egyenlőségek biztosítják.

$$X_{G_i} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \gamma_i - y_{ij} \cdot \cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \sin \beta_i + \\ + a \cdot [\cos \beta_i \cdot \cos \gamma_i \cdot \cos \alpha_{1i}^0 - \cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i \cdot \cos \alpha_{2i}^0 + \sin \beta_i \cdot \cos \alpha_{3i}^0] - \\ - X_{G_j} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \cos \beta_j \cdot \sin \gamma_j - z_{ji} \cdot \sin \beta_j = 0$$

$$Y_{G_i} + x_{ij} \cdot (\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + \\ + y_{ij} \cdot (-\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) - z_{ij} \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i + \\ + a \cdot \left[ \begin{array}{l} (\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{1i}^0 + \\ + (-\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{2i}^0 - \\ - \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i \cdot \cos \alpha_{3i}^0 \end{array} \right] - Y_{G_j} - \\ - x_{ji} \cdot (\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - \\ - y_{ji} \cdot (-\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) + z_{ji} \cdot \sin \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0$$

$$\begin{aligned}
& Z_{Gi} + x_{ij} \cdot (-\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + \\
& + y_{ij} \cdot (\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) + z_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i + \\
& + a \cdot \left[ \begin{aligned} & (-\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{1i}^0 + \\ & + (\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{2i}^0 + \\ & + \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i \cdot \cos \alpha_{3i}^0 \end{aligned} \right] - Z_{Gj} - \\
& - x_{ji} \cdot (-\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - \\
& - y_{ji} \cdot (\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \cos \gamma_j) - z_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0
\end{aligned}$$

$$b_{11i} = b_{11j}$$

$$b_{31i} = b_{31j} \quad (2.24)$$

### 2.2.3. A csúszka (keresztfej) esete

A csúszka három forgó- és két csúszzómozgást zár ki, tehát jelen esetben egy csúszzómozgást enged az  $O_{ij}x_i^*$  tengely mentén. A kizáráshoz szükséges kényszer-egyenletek száma öt. A (2.25) egyenletben az első két feltétel megfelel az  $O_{ij}x_i^* = O_{ji}x_j^*$  egytengelyességnek, illetve  $\beta_i^* = \beta_j^*$  és  $\gamma_i^* = \gamma_j^*$ , a harmadik pedig az  $O_{ij}x_i^*$  tengely körüli elfordulást akadályozza meg az  $\alpha_i^* = \alpha_j^*$  feltétellel.

$$\begin{aligned}
& X_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \gamma_i - y_{ij} \cdot \cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \sin \beta_i + \\
& + a \cdot [\cos \beta_i \cdot \cos \gamma_i \cdot \cos \alpha_{1i}^0 - \cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i \cdot \cos \alpha_{2i}^0 + \sin \beta_i \cdot \cos \alpha_{3i}^0] - \\
& - X_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \cos \beta_j \cdot \sin \gamma_j - z_{ji} \cdot \sin \beta_j = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Y_{Gi} + x_{ij} \cdot (\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + \\
& + y_{ij} \cdot (-\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) - z_{ij} \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i + \\
& + a \cdot \left[ \begin{aligned} & (\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{1i}^0 + \\ & + (-\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{2i}^0 - \\ & - \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i \cdot \cos \alpha_{3i}^0 \end{aligned} \right] - Y_{Gj} - \\
& - x_{ji} \cdot (\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - \\
& - y_{ji} \cdot (-\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) + z_{ji} \cdot \sin \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Z_{Gi} + x_{ij} \cdot (-\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + \\
& + y_{ij} \cdot (\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) + \\
& + z_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a \cdot \left[ \begin{aligned} & (-\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{1i}^0 + \\ & + (\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{2i}^0 + \\ & + \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i \cdot \cos \alpha_{3i}^0 \end{aligned} \right] - Z_{Gj} - \\
& - x_{ji} \cdot (-\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - \\
& - y_{ji} \cdot (\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \cos \gamma_j) - z_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0
\end{aligned}$$

$$b_{11i} = b_{11j}$$

$$b_{31i} = b_{31j}$$

$$b_{33i} = b_{33j} \tag{2.25}$$

A (2.25) egyenletrendszer hat egyenletből áll. Az „ $\mathbf{a}$ ” paraméter kiküszöbölésével számuk ötre csökkenthető, de ez nem feltétlenül szükséges. Ha az „ $\mathbf{a}$ ” paramétert a számítógépes illesztés során ismeretlennek tekintjük, akkor maradhat a hat egyenletből álló rendszer.

#### 2.2.4. A gömbcsukló esete

A gömbcsukló három forgómozgást enged meg, a három haladó mozgást pedig kizárja. A két testnek egyetlen közös pontja van, legyen ez az  $O_{ij}^* \equiv O_{ji}^*$  közös origó – így az „ $\mathbf{a}$ ” zérus értékű, és a (2.22) alapján felírható:

$$\begin{aligned}
& X_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \gamma_i - y_{ij} \cdot \cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \sin \beta_i - X_{Gj} - \\
& - x_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \cos \beta_j \cdot \sin \gamma_j - z_{ji} \cdot \sin \beta_j = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Y_{Gi} + x_{ij} \cdot (\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + \\
& + y_{ij} \cdot (-\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) - \\
& - z_{ij} \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i - Y_{Gj} - x_{ji} \cdot (\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - \\
& - y_{ji} \cdot (-\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) + z_{ji} \cdot \sin \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Z_{Gi} + x_{ij} \cdot (-\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + \\
& + y_{ij} \cdot (\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) + z_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i - Z_{Gj} - \\
& - x_{ji} \cdot (-\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - \\
& - y_{ji} \cdot (\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \cos \gamma_j) - z_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0
\end{aligned}$$

$$\tag{2.26}$$

### 2.2.5. Az egytetemes csukló (kardánkereszt vagy csapos gömbcsukló) esete

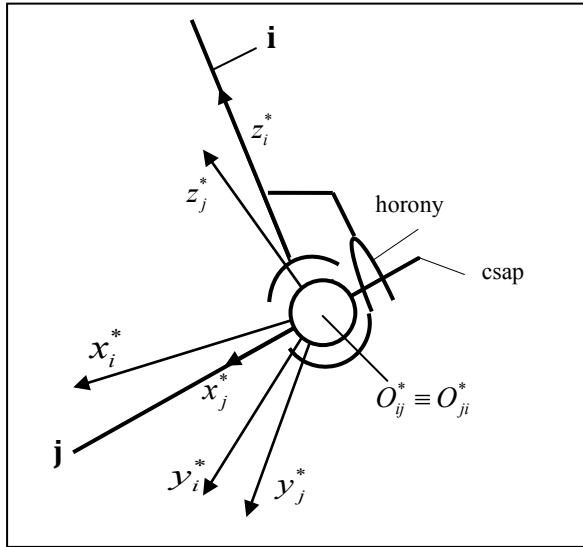
Az egytetemes csukló kényszer egyenleteinek felírása az összes csukló közül a legbonyolultabb. A gömbcsuklóra meghatározott három egyenlet mellé rendeljük a  $\Delta_i$  és  $\Delta_j$  egyenesek merőlegességi feltételeit, a segédrendszer tengelyei helyzetének függvényében. Ezeket a feltételeket az egységvektorok skaláris szorzatával lehet a legegyszerűbben kifejezni, amelyek:  $(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) = 0$ ,  $(\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) = 0$  vagy  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) = 0$ . Ebben a sorrendben, a (2.5) mátrix figyelembevételével felírható, hogy:

$$\begin{aligned} b_{11i}b_{12j} + b_{21i}b_{22j} + b_{31i}b_{32j} &= 0 \\ b_{11j}b_{12i} + b_{21j}b_{22i} + b_{31j}b_{32i} &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} b_{12i}b_{13j} + b_{22i}b_{23j} + b_{32i}b_{33j} &= 0 \\ b_{12j}b_{13i} + b_{22j}b_{23i} + b_{32j}b_{33i} &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} b_{13i}b_{11j} + b_{23i}b_{21j} + b_{33i}b_{31j} &= 0 \\ b_{13j}b_{11i} + b_{23j}b_{21i} + b_{33j}b_{31i} &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

A (2.27), (2.28) vagy a (2.29) skaláris szorzatot hozzárendelve a (2.26) rendszerhez, a mechanizmusban felvett tengelyek és a horony helyzetének függvényében az egytetemes csukló kényszer egyenletének rendszerét hatféleképpen lehet megfogalmazni. Ez a lehetőség lényegesen megkönnyíti az egytetemes csuklót tartalmazó térmechanizmus kényszer egyenleteiből alkotott rendszer összeállítását az Euler-szögekkel felírt kényszer egyenletekkel szemben. Az egytetemes csukló feltételeit mindig a csap tengelyének és a horony szimmetriatengelyének a kinematikai párt alkotó tagokon felvett segédrendszerhez viszonyított helyzete határozza meg. Jelen könyvben csak a 2.3. ábrán szemléltetett esetet tárgyaljuk. Itt a „j”-edik taghoz tartozó csap az  $O_{ji}x_j^*$  tengely irányában helyezkedik el, a „i”-edik taghoz tartozó horony szimmetriatengelye pedig az  $O_{ij}z_i^*$  és  $O_{ij}x_i^*$  tengelyek által meghatározott síkba illeszkedik. A három forgómozgásból egy kizárt, a fennmaradt két forgómozgás is csak bizonyos tengelyek körül lehetséges. Figyelembe véve, hogy a horony szimmetriatengelye az  $O_{ij}x_i^*z_i^*$  síkban helyezkedik el, az  $O_{ji}x_j^*$  tengely csak a saját tengelye vagy az  $O_{ij}y_i^*$  tengely körül fordulhat el. Az  $O_{ij}y_i^*$  tengely mindig merőleges az  $O_{ij}x_i^*z_i^*$  síkra, az  $O_{ji}x_j^*$  mindig benne van a síkban, így felírható a feltétel, hogy  $O_{ij}y_i^* \perp O_{ji}x_j^*$  ami a (2.27) második egyenletének felel meg.



2.3. ábra

Az összes lehetséges esetet összefoglalva kimondható az egytetemes csukló kényszeregyenletéhez tartozó feltétel: Az „i” vagy „j” taghoz tartozó csap szimmetriatengelye egységvektorának a „j” vagy „i” taghoz tartozó vezetőhorony hosszirányú szimmetria síkjára merőleges tengely egységvektorával alkotott skaláris szorzata mindig egyenlő zéróval.

Az egytetemes csukló  $O_{ji}x_j^*$  tengellyel egybeeső csapja szerinti kényszeregyenletek a (2.26) és a (2.27) egyenletekkel kifejezett feltételek egyik sajátos esetének felelnek meg. Ebben az esetben az egytetemes csukló kényszeregyenletei a 2.3. ábra szerint a következők:

$$X_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \gamma_i - y_{ij} \cdot \cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \sin \beta_i - X_{Gj} - \\ - x_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \cos \beta_j \cdot \sin \gamma_j - z_{ji} \cdot \sin \beta_j = 0$$

$$Y_{Gi} + x_{ij} \cdot (\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + \\ + y_{ij} \cdot (-\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) - z_{ij} \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i - Y_{Gj} - \\ - x_{ji} \cdot (\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - \\ - y_{ji} \cdot (-\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) + z_{ji} \cdot \sin \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0$$

$$Z_{Gi} + x_{ij} \cdot (-\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + \\ + y_{ij} \cdot (\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) + z_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i - Z_{Gj} - \\ - x_{ji} \cdot (-\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - \\ - y_{ji} \cdot (\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \cos \gamma_j) - z_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0$$

$$b_{11j}b_{12i} + b_{21j}b_{22i} + b_{31j}b_{32i} = 0 \quad (2.31)$$

Az egytetemes csukló kényszer egyenleteinek feltétele a tagokon elhelyezett horony irányától függően változik. Ezért a feltételt az adott helyzetnek megfelelő formában kell felírni.

### 2.2.6. A menetes csukló esete

A menetes csuklót a henger alakú csuklótól a forgó- és a csúszómozgások közötti összefüggés létezése különbözteti meg. Az  $O_i X_i^*$  tengely körüli forgómozgás meghatározza a tengely menti haladómozgás értékét és fordítva, tehát a két mozgás között léteznie kell a következő összefüggésnek:

$$a = a_0 + p \cdot \varphi_\alpha \quad (2.32)$$

ahol a „ $p$ ” a menet emelkedését, a  $\varphi$  szög pedig az „ $i$ ” és „ $j$ ” tagok közötti szögel fordulást fejezi ki:

$$\varphi_\alpha = \alpha_i^* - \alpha_j^* \quad (2.33)$$

A (2.32) és a (2.33) egyenletekből, kapjuk:

$$a = a_0 + p \cdot (\alpha_i^* - \alpha_j^*) \quad (2.34)$$

A (2.20) és a (2.21) egyenlőségek hányadosaiból kifejezve az  $\alpha_i^*$  és az  $\alpha_j^*$  értékeit, felírható a segédrendszerek  $O_{ij} z_i^*$  és az  $O_{ji} z_j^*$  tengelyeinek a rögzített rendszer OZ tengelyével alkotott szögei:

$$\alpha_i^* = -\arctg\left(\frac{b_{23i}}{b_{33i}}\right) \quad (2.35)$$

$$\alpha_j^* = -\arctg\left(\frac{b_{23j}}{b_{33j}}\right) \quad (2.36)$$

amelyekkel a tengely menti haladómozgás és a forgómozgás közötti összefüggés a következőképpen írható:

$$a = a_0 - p \cdot \left( \arctg\left(\frac{b_{23i}}{b_{33i}}\right) - \arctg\left(\frac{b_{23j}}{b_{33j}}\right) \right) \quad (2.37)$$

A menetes csukló kényszer egyenletei a (2.22) rendszerből, a (2.13), (2.15) és a (2.37) feltételekből állnak, amely:

## 2. A KINEMATIKAI PÁROK KÉNYSZEREGYENLETEI

$$\begin{aligned}
& X_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \gamma_i - y_{ij} \cdot \cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \sin \beta_i + \\
& + a \cdot [\cos \beta_i \cdot \cos \gamma_i \cdot \cos \alpha_{1i}^0 - \cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i \cdot \cos \alpha_{2i}^0 + \sin \beta_i \cdot \cos \alpha_{3i}^0] - \\
& - X_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \cos \beta_j \cdot \sin \gamma_j - z_{ji} \cdot \sin \beta_j = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Y_{Gi} + x_{ij} \cdot (\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + i \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + \\
& + y_{ij} \cdot (-\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) - z_{ij} \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i + \\
& + a \cdot \left[ \begin{array}{l} (\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{1i}^0 + \\ + (-\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{2i}^0 - \\ - \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i \cdot \cos \alpha_{3i}^0 \end{array} \right] - Y_{Gj} - \\
& - x_{ji} \cdot (\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - \\
& - y_{ji} \cdot (-\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) + z_{ji} \cdot \sin \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Z_{Gi} + x_{ij} \cdot (-\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + \\
& + y_{ij} \cdot (\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) + z_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i + \\
& + a \cdot \left[ \begin{array}{l} (-\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{1i}^0 + \\ + (\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) \cdot \cos \alpha_{2i}^0 + \\ + \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i \cdot \cos \alpha_{3i}^0 \end{array} \right] - Z_{Gj} - \\
& - x_{ji} \cdot (-\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - \\
& - y_{ji} \cdot (\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \cos \gamma_j) - z_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0
\end{aligned}$$

$$b_{11i} = b_{11j}$$

$$b_{31i} = b_{31j}$$

$$a = -p \cdot \left( \arctg \left( \frac{b_{23i}}{b_{33i}} \right) - \arctg \left( \frac{b_{23j}}{b_{33j}} \right) \right) \quad (2.38)$$

### 2.3. Kinematikai párok kényszer egyenletei az $O_{ij}^* y_i^*$ és az $O_{ji}^* y_j^*$ tengelyek egymásra helyezése esetén

Az  $O_{ij}^* y_i^* \equiv O_{ji}^* y_j^*$  tengelyek egymásra helyezése esetén a kényszer egyenleteket a 2.4. ábra alapján írjuk fel. Ebben az esetben a (2.2) vektorsököszöghöz tartozó mátrix egyenlet a következő:

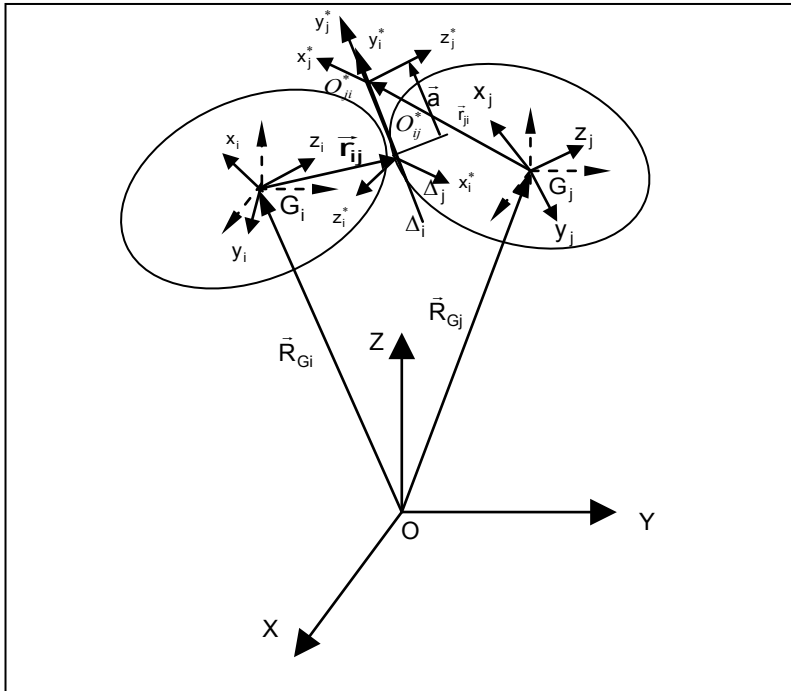
$$\begin{bmatrix} \cos \alpha_{1i} & \cos \beta_{1i} & \cos \gamma_{1i} & X_{Gi} \\ \cos \alpha_{2i} & \cos \beta_{2i} & \cos \gamma_{2i} & Y_{Gi} \\ \cos \alpha_{3i} & \cos \beta_{3i} & \cos \gamma_{3i} & Z_{Gi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \\ 1 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} b_{12i} \\ b_{22i} \\ b_{32i} \\ 0 \end{bmatrix} - \\
 - \begin{bmatrix} \cos \alpha_{1j} & \cos \beta_{1j} & \cos \gamma_{1j} & X_{Gj} \\ \cos \alpha_{2j} & \cos \beta_{2j} & \cos \gamma_{2j} & Y_{Gj} \\ \cos \alpha_{3j} & \cos \beta_{3j} & \cos \gamma_{3j} & Z_{Gj} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{ji} \\ y_{ji} \\ z_{ji} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.39}$$

Innen felírhatjuk erre az esetre is az általános alakú kényszer egyenleteket:

$$X_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \cos \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \cos \gamma_{1i} + a \cdot b_{12i} - X_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{1j} - \\
 - y_{ji} \cdot \cos \beta_{1j} - z_{ji} \cdot \cos \gamma_{1j} = 0$$

$$Y_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \cos \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \cos \gamma_{2i} + a \cdot b_{22i} - Y_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{2j} - \\
 - y_{ji} \cdot \cos \beta_{2j} - z_{ji} \cdot \cos \gamma_{2j} = 0$$

$$Z_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \cos \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \cos \gamma_{3i} + a \cdot b_{32i} - Z_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{3j} - \\
 - y_{ji} \cdot \cos \beta_{3j} - z_{ji} \cdot \cos \gamma_{3j} = 0 \tag{2.40}$$

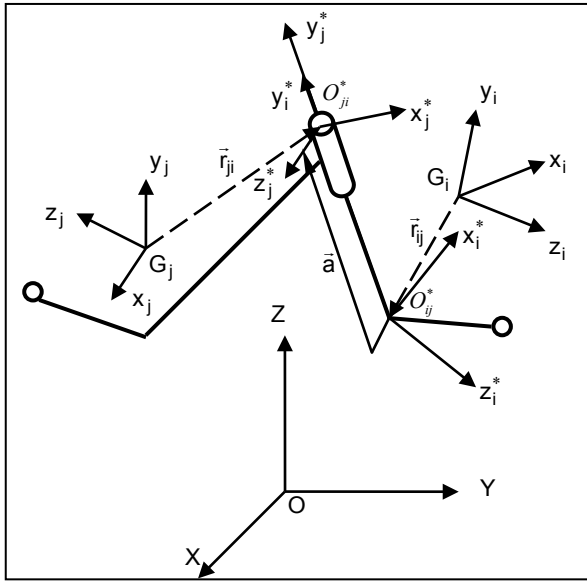


2.4. ábra



### 2.3.1. A henger alakú csukló esete

A henger alakú csukló egy  $O_{ij}y_i^*$  tengely körüli forgómozgást és egy, e tengely menti csúszómozgást tesz lehetővé (2.5. ábra). Az első három kényszeregyenletet a (2.22) kifejezések adják, ezekhez hozzá kell rendelni még két feltételt a (2.1) képletekből a (2.16), (2.17) vagy a (2.18) egyenletek szerint, azaz:



2.5. ábra

$$X_{G_i} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \gamma_i - y_{ij} \cdot \cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \sin \beta_i + a \cdot b_{12i} - X_{G_j} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \cos \beta_j \cdot \sin \gamma_j - z_{ji} \cdot \sin \beta_j = 0$$

$$Y_{G_i} + x_{ij} \cdot (\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + y_{ij} \cdot (-\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) - z_{ij} \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i + a \cdot b_{22i} - Y_{G_j} - x_{ji} \cdot (\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - y_{ji} \cdot (-\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) + z_{ji} \cdot \sin \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0$$

$$Z_{G_i} + x_{ij} \cdot (-\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + y_{ij} \cdot (\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) + z_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i + a \cdot b_{32i} - Z_{G_j} - x_{ji} \cdot (-\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - y_{ji} \cdot (\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \cos \gamma_j) - z_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0$$

$$b_{12i} = b_{12j}$$

$$b_{32i} = b_{32j}$$

$$(2.41)$$

### 2.3.2. A forgó csukló esete

Az  $O_i Y_i^*$  tengely körüli forgó csukló egyetlen relatív mozgást enged meg a két tag között. A forgó csukló első három egyenletét a (2.40) rendszer adja.

A két tag egymáshoz viszonyítva az  $O_{ij} y_i^* = O_{ji} y_j^*$  tengely körül fordul el, illetve  $\beta_i^* \neq \beta_j^*$ . Az egytengelyűséget az  $\alpha_i^* = \alpha_j^*$  és a  $\gamma_i^* = \gamma_j^*$  forgásszögek biztosítják. Ezzel, valamint a (2.16) és (2.18) egyenletekkel felírható a forgó csukló kényszer-egyenlet-rendszere:

$$X_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \cos \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \cos \gamma_{1i} + a \cdot b_{12i} - X_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{1j} - y_{ji} \cdot \cos \beta_{1j} - z_{ji} \cdot \cos \gamma_{1j} = 0$$

$$Y_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \cos \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \cos \gamma_{2i} + a \cdot b_{22i} - Y_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{2j} - y_{ji} \cdot \cos \beta_{2j} - z_{ji} \cdot \cos \gamma_{2j} = 0$$

$$Z_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \cos \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \cos \gamma_{3i} + a \cdot b_{32i} - Z_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{3j} - y_{ji} \cdot \cos \beta_{3j} - z_{ji} \cdot \cos \gamma_{3j} = 0$$

$$b_{12i} = b_{12j}$$

$$b_{32i} = b_{32j} \tag{2.42}$$

### 2.3.3. A csúszka (keresztfej) esete

A csúszka az  $O_{ij} y_i^* \equiv O_{ji} y_j^*$  tengelyek egymásra helyezése esetén is egyetlen csúszómozgást enged az  $O_{ij} y_i^*$  tengely mentén. A kizárt relatív mozgások száma öt, tehát öt egymástól független kényszer-egyenletre van szükség. Ha az „a” paraméter a rendszerben marad, akkor a kényszer-egyenletek száma hat marad. A (2.41) rendszerhez még hozzá kell rendelni egy feltételt, amely megakadályozza a csúszka  $O_{ij} y_i^*$  tengely körüli elfordulását. Ez a feltétel megegyezik a csúszást biztosító tengelyekre húzott közös normálisok egybeesési feltételével, például:

$$b_{31i} = b_{31j}$$

vagy

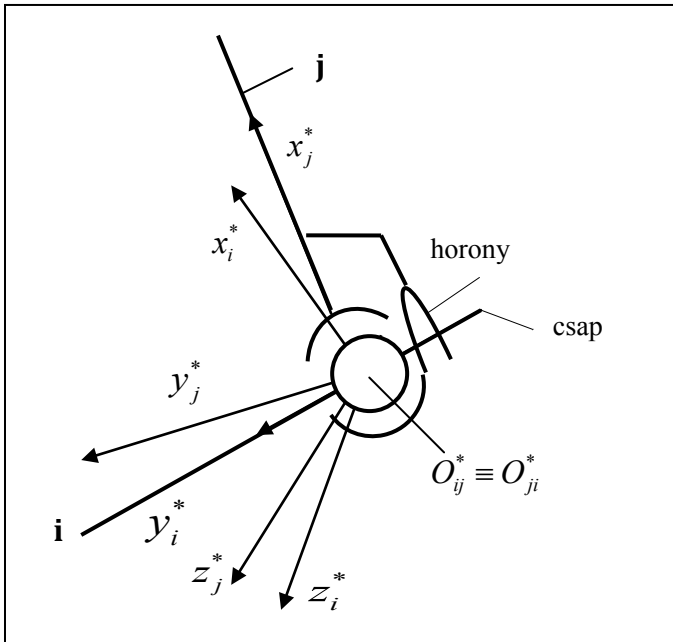
$$b_{33i} = b_{33j} \tag{2.43}$$

### 2.3.4. A gömbcsukló esete

A gömbcsukló kényszer egyenletei nem függenek a tengelyek helyzetétől, tehát a háromtengelyes forgatás mindhárom esetében megegyezik a (2.26) egyenlettel.

### 2.3.5. Az egytetemes csukló (kardánkereszt vagy csapos gömbcsukló) esete

Ebben az esetben az egytetemes csukló csapja az  $O_{ij}y_i^*$  tengely irányában helyezkedik el, lásd a 2.6. ábrát. Kezdetben az  $O_{ij}y_i^* \equiv O_{ji}y_j^*$  egybeesik, majd a „j” tag az  $O_{ij}y_i^*$  tengelyen fordulhat el. A horony az  $O_{ji}x_j^*y_j^*$  síkban van, figyelembe véve, hogy a csap nem hagyhatja el a horony által meghatározott síkot, a második elfordulás a síkra merőleges  $O_{ji}z_j^*$  tengely körül mehet végbe. A két forgástengely merőleges egymásra, illetve a feltétel  $O_{ij}y_i^* \perp O_{ji}z_j^*$ , amelynek a (2.28) egyenletek első sora felel meg.



2.6. ábra

Az egytetemes csukló kezdeti helyzetének megfelelő  $O_{ij}y_i^* \equiv O_{ji}y_j^*$  tengellyel egybeeső csapja szerint felírt kényszer egyenlet-rendszernek a (2.26) és a (2.28)

egyenletekkel kifejezett alakja, a gyakorlatban előforduló helyzetek egyikére a 2.6. ábra szerint a következő:

$$\begin{aligned}
 X_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \gamma_i - y_{ij} \cdot \cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \sin \beta_i - X_{Gj} - \\
 - x_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \cos \beta_j \cdot \sin \gamma_j - z_{ji} \cdot \sin \beta_j = 0 \\
 Y_{Gi} + x_{ij} \cdot (\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + \\
 + y_{ij} \cdot (-\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) - z_{ij} \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i - Y_{Gj} - \\
 - x_{ji} \cdot (\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - \\
 - y_{ji} \cdot (-\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) + z_{ji} \cdot \sin \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0 \\
 Z_{Gi} + x_{ij} \cdot (-\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + \\
 + y_{ij} \cdot (\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) + z_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i - Z_{Gj} - \\
 - x_{ji} \cdot (-\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - \\
 - y_{ji} \cdot (\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \cos \gamma_j) - z_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0 \\
 b_{12i}b_{13j} + b_{22i}b_{23j} + b_{32i}b_{33j} = 0 \tag{2.44}
 \end{aligned}$$

Ha a csukló csapja a „j” taghoz tartozik, akkor a (2.44) képletben szereplő skaláris szorzatokban az „i” és a „j” index felcserélődik, mint például:

$$b_{12j}b_{13i} + b_{22j}b_{23i} + b_{32j}b_{33i} = 0 \tag{2.45}$$

### 2.3.6. A menetes csukló esete

A menetes csuklót az jellemzi, hogy a forgó- és a csúszómozgások között folyamatosan fennáll egy, a csukló geometriájából adódó összefüggés. Az  $O_{ij}y_i^*$  tengely körüli forgómozgás és a tengely menti haladómozgás között felírható az

$$a = a_0 + p \cdot \varphi_\beta \tag{2.46}$$

összefüggés, amelyben a „p” a menet csavarparaméterét (az egy radiánnyi szögelfordulásra értelmezett tengelyirányú haladást), a  $\varphi$  szög pedig az „i” és „j” tagok relatív szögelfordulását fejezi ki, azaz:

$$\varphi_\beta = \beta_i^* - \beta_j^* \tag{2.47}$$

A (2.46) és a (2.47) egyenletekből kapjuk, hogy

$$a = a_0 + p \cdot (\beta_i^* - \beta_j^*) \tag{2.48}$$

## 2. A KINEMATIKAI PÁROK KÉNYSZEREGYENLETEI

A (2.19) egyenlőségből kifejezve a  $\beta_i^*$  és a  $\beta_j^*$  szögeket, felírható a segédrendszer  $O_{ij}z_i^*$  és az  $O_{ji}z_j^*$  tengelyeinek a rögzített rendszer OZ tengelyével alkotott szögei:

$$\beta_i^* = \arcsin(b_{13i}) \quad (2.49)$$

$$\beta_j^* = \arcsin(b_{13j}) \quad (2.50)$$

Ezzel a tengely menti haladómozgás és forgómozgás kötöttsége a következőképpen írható:

$$a = a_0 + p \cdot (\arcsin(b_{13i}) - \arcsin(b_{13j})) \quad (2.51)$$

A menetes csukló kényszer egyenletei a (2.40) egyenletrendszerből, valamint a (2.16), (2.18) és a (2.51) feltételekből épülnek fel, azaz:

$$X_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \gamma_i - y_{ij} \cdot \cos \beta_i \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \sin \beta_i + a \cdot b_{12i} - X_{Gj} - \\ - x_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \cos \beta_j \cdot \sin \gamma_j - z_{ji} \cdot \sin \beta_j = 0$$

$$Y_{Gi} + x_{ij} \cdot (\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + \\ + y_{ij} \cdot (-\sin \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \cos \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) - z_{ij} \cdot \sin \alpha_i \cdot \cos \beta_i + \\ + a \cdot b_{22i} - Y_{Gj} - x_{ji} \cdot (\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - \\ - y_{ji} \cdot (-\sin \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \cos \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) + z_{ji} \cdot \sin \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0$$

$$Z_{Gi} + x_{ij} \cdot (-\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \sin \gamma_i) + \\ + y_{ij} \cdot (\cos \alpha_i \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i + \sin \alpha_i \cdot \cos \gamma_i) + z_{ij} \cdot \cos \alpha_i \cdot \cos \beta_i + a \cdot b_{32i} - \\ - Z_{Gj} - x_{ji} \cdot (-\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \cos \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \sin \gamma_j) - \\ - y_{ji} \cdot (\cos \alpha_j \cdot \sin \beta_j \cdot \sin \gamma_j + \sin \alpha_j \cdot \cos \gamma_j) - z_{ji} \cdot \cos \alpha_j \cdot \cos \beta_j = 0$$

$$b_{12i} = b_{12j}$$

$$b_{32i} = b_{32j}$$

$$a = a_0 + p \cdot (\arcsin(b_{13i}) - \arcsin(b_{13j})) \quad (2.52)$$

### 3. A SEBESSÉGEK KÉNYSZEREGYENLETEI

#### 3.1. A sebességek kényszer egyenletei az $O_{ij}^* x_i^*$ és az $O_{ji}^* x_j^*$ tengelyek egybeesésekor

A mechanizmus adott tagjának sebesség-, valamint szögsebesség-eloszlásának kiszámításához a (2.12), ... (2.21) és a (2.39) egyenleteket idő függvényében deriváljuk. A (2.7) és a (2.8) egyenletekkel kifejezett iránytényezőket a továbbiakban csak egyszerűen  $\alpha_{1i}, \beta_{1i}, \gamma_{1i}, \dots, \alpha_{3i}, \beta_{3i}, \gamma_{3i}$ -vel, illetve  $\alpha_{1i}^0, \beta_{1i}^0, \gamma_{1i}^0, \dots, \alpha_{3i}^0, \beta_{3i}^0, \gamma_{3i}^0$ -vel fogjuk jelölni. Emlékezzünk, hogy a  $\alpha_{1i}, \beta_{1i}, \gamma_{1i}, \dots, \alpha_{3i}, \beta_{3i}, \gamma_{3i}$  iránytényezők a tehetetlenségi főtengely-rendszer tengelyeinek iránytényezői a helytálló rendszerhez viszonyítva, míg az  $\alpha_{1i}^0, \beta_{1i}^0, \gamma_{1i}^0, \dots, \alpha_{3i}^0, \beta_{3i}^0, \gamma_{3i}^0$  a geometriai azaz segéd koordináta-rendszer tengelyeinek iránykoszinuszai a tehetetlenségi főirányok rendszerében, a (2.8) egyenlet  $T_{ii}^*$  mátrixa. Ha a (2.3) egyenletet idő szerint deriváljuk, a fentebb említett jelölésekkel, az alábbi egyenlethez jutunk:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{1i} & \dot{\beta}_{1i} & \dot{\gamma}_{1i} & \dot{X}_{Gi} \\ \dot{\alpha}_{2i} & \dot{\beta}_{2i} & \dot{\gamma}_{2i} & \dot{Y}_{Gi} \\ \dot{\alpha}_{3i} & \dot{\beta}_{3i} & \dot{\gamma}_{3i} & \dot{Z}_{Gi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \\ 1 \end{bmatrix} + \dot{a} \cdot \begin{bmatrix} b_{11i} \\ b_{21i} \\ b_{31i} \\ 0 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} \dot{b}_{11i} \\ \dot{b}_{21i} \\ \dot{b}_{31i} \\ 0 \end{bmatrix} - \\ - \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{1j} & \dot{\beta}_{1j} & \dot{\gamma}_{1j} & \dot{X}_{Gj} \\ \dot{\alpha}_{2j} & \dot{\beta}_{2j} & \dot{\gamma}_{2j} & \dot{Y}_{Gj} \\ \dot{\alpha}_{3j} & \dot{\beta}_{3j} & \dot{\gamma}_{3j} & \dot{Z}_{Gj} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{ji} \\ y_{ji} \\ z_{ji} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.1)$$

ahol:

$$\cos \alpha_{1i} = \cos \beta_i \cdot \cos \gamma_i,$$

$$(\cos \alpha_{1i})' = \dot{\alpha}_{1i} = -\dot{\beta}_i \sin \beta_i \cos \gamma_i - \dot{\gamma}_i \cos \beta_i \sin \gamma_i$$

A 2.7. egyenletekkel kifejezett iránytényezőket figyelembe véve felírható:

$$\frac{d}{dt} (\cos \alpha_{1i}) = \dot{\alpha}_{1i} = -\dot{\beta}_i \cdot \cos \gamma_{1i} (\beta_i) \cdot \cos \gamma_i + \dot{\gamma}_i \cdot \cos \beta_{1i} (\beta_i, \gamma_i)$$

$$\frac{d}{dt} (\cos \beta_{1i}) = \dot{\beta}_{1i} = \dot{\beta}_i \cdot \cos \gamma_{1i} (\beta_i) \cdot \sin \gamma_i - \dot{\gamma}_i \cdot \cos \alpha_{1i} (\beta_i, \gamma_i)$$

## 3. A SEBESSÉGEK KÉNYSZEREGYENLETEI

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\cos \gamma_{1i}) &= \dot{\gamma}_{1i} = \dot{\beta}_i \cdot \cos \beta_i \\
\frac{d}{dt}(\cos \alpha_{2i}) &= \dot{\alpha}_{2i} = -\dot{\alpha}_i \cdot \cos \alpha_{3i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) + \dot{\beta}_i \cdot \cos \alpha_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \sin \alpha_i + \\
&\quad + \dot{\gamma}_i \cdot \cos \beta_{2i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \\
\frac{d}{dt}(\cos \beta_{2i}) &= \dot{\beta}_{2i} = -\dot{\alpha}_i \cdot \cos \beta_{3i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) - \dot{\gamma}_i \cdot \cos \alpha_{2i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) + \\
&\quad + \dot{\beta}_i \cdot \cos \beta_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \sin \alpha_i \\
\frac{d}{dt}(\cos \gamma_{2i}) &= \dot{\gamma}_{2i} = -\dot{\alpha}_i \cdot \cos \gamma_{3i}(\alpha_i, \beta_i) + \dot{\beta}_i \cdot \cos \gamma_{1i}(\beta_i) \cdot \sin \alpha_i \\
\frac{d}{dt}(\cos \alpha_{3i}) &= \dot{\alpha}_{3i} = \dot{\alpha}_i \cdot \cos \alpha_{2i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) + \dot{\gamma}_i \cdot \cos \beta_{3i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) - \\
&\quad - \dot{\beta}_i \cdot \cos \alpha_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \cos \alpha_i \\
\frac{d}{dt}(\cos \beta_{3i}) &= \dot{\beta}_{3i} = \dot{\alpha}_i \cdot \cos \beta_{2i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) - \dot{\gamma}_i \cdot \cos \alpha_{3i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) - \\
&\quad - \dot{\beta}_i \cdot \cos \beta_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \cos \alpha_i \\
\frac{d}{dt}(\cos \gamma_{3i}) &= \dot{\gamma}_{3i} = \dot{\alpha}_i \cdot \cos \gamma_{2i}(\alpha_i, \beta_i) - \dot{\beta}_i \cdot \cos \gamma_{1i}(\beta_i) \cdot \cos \alpha_i \tag{3.2}
\end{aligned}$$

A mechanizmusok tagjainak sebességeit, a pozíciókhoz hasonlóan, a zárt vektorsokszögekre felírt lineáris egyenletrendszer segítségével határozzuk meg.

A (2.13), ... (2.21) és a (2.32) képletekben szereplő együtthatók parciális deriváltjai a következők:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b_{11i}}{\partial \alpha_i} &= 0 \\
\frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} &= -\sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i \cdot \alpha_{1i}^0 + \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i \cdot \alpha_{2i}^0 + \cos \beta_i \cdot \alpha_{3i}^0 \\
\frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} &= \cos \beta_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \alpha_{1i}^0 - \cos \alpha_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \alpha_{2i}^0 \\
\frac{\partial b_{21i}}{\partial \alpha_i} &= -(\cos \alpha_{3i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \alpha_{1i}^0 + \cos \beta_{3i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \alpha_{2i}^0 + \cos \gamma_{3i}(\alpha_i, \beta_i) \cdot \alpha_{3i}^0) \\
\frac{\partial b_{21i}}{\partial \beta_i} &= (\cos \alpha_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \alpha_{1i}^0 + \cos \beta_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \alpha_{2i}^0 + \sin \beta_i \cdot \alpha_{3i}^0) \cdot \sin \alpha_i \\
\frac{\partial b_{21i}}{\partial \gamma_i} &= \cos \beta_{2i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \alpha_{1i}^0 - \cos \alpha_{2i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \alpha_{2i}^0 \\
\frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} &= (\cos \alpha_{2i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \alpha_{1i}^0 + \cos \beta_{2i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \alpha_{2i}^0 + \cos \gamma_{2i}(\alpha_i, \beta_i) \cdot \alpha_{3i}^0) \\
\frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} &= -(\cos \alpha_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \alpha_{1i}^0 + \cos \beta_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \alpha_{2i}^0 + \sin \beta_i \cdot \alpha_{3i}^0) \cdot \cos \alpha_i
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} = \cos \beta_{3i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \alpha_{1i}^0 - \cos \alpha_{3i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \alpha_{2i}^0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial b_{12i}}{\partial \alpha_i} = 0$$

$$\frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} = -\sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i \cdot \beta_{1i}^0 + \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i \cdot \beta_{2i}^0 + \cos \beta_i \cdot \beta_{3i}^0$$

$$\frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} = \cos \beta_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \beta_{1i}^0 - \cos \alpha_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \beta_{2i}^0$$

$$\frac{\partial b_{22i}}{\partial \alpha_i} = -(\cos \alpha_{3i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \beta_{1i}^0 + \cos \beta_{3i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \beta_{2i}^0 + \cos \gamma_{3i}(\alpha_i, \beta_i) \cdot \beta_{3i}^0)$$

$$\frac{\partial b_{22i}}{\partial \beta_i} = (\cos \alpha_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \beta_{1i}^0 + \cos \beta_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \beta_{2i}^0 + \sin \beta_i \cdot \beta_{3i}^0) \cdot \sin \alpha_i$$

$$\frac{\partial b_{22i}}{\partial \gamma_i} = \cos \beta_{2i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \beta_{1i}^0 - \cos \alpha_{2i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \beta_{2i}^0$$

$$\frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} = \cos \alpha_{2i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \beta_{1i}^0 + \cos \beta_{2i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \beta_{2i}^0 + \cos \gamma_{2i}(\alpha_i, \beta_i) \cdot \beta_{3i}^0$$

$$\frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} = -(\cos \alpha_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \beta_{1i}^0 + \cos \beta_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \beta_{2i}^0 + \sin \beta_i \cdot \beta_{3i}^0) \cdot \cos \alpha_i$$

$$\frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} = \cos \beta_{3i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \beta_{1i}^0 - \cos \alpha_{3i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \beta_{2i}^0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial b_{13i}}{\partial \alpha_i} = 0$$

$$\frac{\partial b_{13i}}{\partial \beta_i} = -\sin \beta_i \cdot \cos \gamma_i \cdot \gamma_{1i}^0 + \sin \beta_i \cdot \sin \gamma_i \cdot \gamma_{2i}^0 + \cos \beta_i \cdot \gamma_{3i}^0$$

$$\frac{\partial b_{13i}}{\partial \gamma_i} = \cos \beta_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \gamma_{1i}^0 - \cos \alpha_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \gamma_{2i}^0$$

$$\frac{\partial b_{23i}}{\partial \alpha_i} = -(\cos \alpha_{3i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \gamma_{1i}^0 + \cos \beta_{3i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \gamma_{2i}^0 + \cos \gamma_{3i}(\alpha_i, \beta_i) \cdot \gamma_{3i}^0)$$

$$\frac{\partial b_{23i}}{\partial \beta_i} = (\cos \alpha_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \gamma_{1i}^0 + \cos \beta_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \gamma_{2i}^0 + \sin \beta_i \cdot \gamma_{3i}^0) \cdot \sin \alpha_i$$

$$\frac{\partial b_{23i}}{\partial \gamma_i} = \cos \beta_{2i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \gamma_{1i}^0 - \cos \alpha_{2i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \gamma_{2i}^0$$

$$\frac{\partial b_{33i}}{\partial \alpha_i} = \cos \alpha_{2i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \gamma_{1i}^0 + \cos \beta_{2i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \gamma_{2i}^0 + \cos \gamma_{2i}(\alpha_i, \beta_i) \cdot \gamma_{3i}^0$$

$$\frac{\partial b_{33i}}{\partial \beta_i} = -(\cos \alpha_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \gamma_{1i}^0 + \cos \beta_{1i}(\beta_i, \gamma_i) \cdot \gamma_{2i}^0 + \sin \beta_i \cdot \gamma_{3i}^0) \cdot \cos \alpha_i$$

$$\frac{\partial b_{33i}}{\partial \gamma_i} = \cos \beta_{3i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \gamma_{1i}^0 - \cos \alpha_{3i}(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \cdot \gamma_{2i}^0 \quad (3.5)$$



amelyekkel felírható, hogy

$$\begin{aligned}
 \frac{db_{11i}}{dt} &= \dot{b}_{11i} = \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} \\
 \frac{db_{21i}}{dt} &= \dot{b}_{21i} = \dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \gamma_i} \\
 \frac{db_{31i}}{dt} &= \dot{b}_{31i} = \dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} \\
 \frac{db_{12i}}{dt} &= \dot{b}_{12i} = \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} \\
 \frac{db_{22i}}{dt} &= \dot{b}_{22i} = \dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \gamma_i} \\
 \frac{db_{32i}}{dt} &= \dot{b}_{32i} = \dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} \\
 \frac{db_{13i}}{dt} &= \dot{b}_{13i} = \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \gamma_i} \\
 \frac{db_{23i}}{dt} &= \dot{b}_{23i} = \dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \gamma_i} \\
 \frac{db_{33i}}{dt} &= \dot{b}_{33i} = \dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \gamma_i}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

A továbbiakban az eddig tárgyalt alacsony osztályú csuklók sebesség-, illetve szögsebesség-eloszlásait tárgyaljuk részletesen.

### 3.1.1. A hengeres csukló

A hengeres csuklóval kapcsolt tagok sebességét meghatározó rendszer első három egyenletének általános alakját a (3.1) mátrixegyenlet adja. Az egytengelyűség feltételeit pedig a (2.1) rendszerből írjuk fel:

$$\begin{aligned}
 \dot{\beta}_i^* &= \dot{\beta}_j^* \\
 \dot{\gamma}_i^* &= \dot{\gamma}_j^*
 \end{aligned}$$

illetve a

$$\begin{aligned}
 \dot{b}_{11i} &= \dot{b}_{11j} \\
 \dot{b}_{31i} &= \dot{b}_{31j} \text{ adja.}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Felhasználva a (3.2), ... (3.5) egyenlőségeket, a (3.1) mátrixegyenlet egyenlet-rendszer-alakra hozható. A (3.7) feltételek, a (3.3) egyenlőségek felhasználásával, az ismeretlenek szerint csoportosíthatók. A (3.1) alapegyenletekből és a (3.7) feltételekből alkotott rendszer a következő:

$$\begin{aligned}
& \dot{X}_{Gi} + \dot{\beta}_i \cdot \left( -x_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i + y_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \cos \beta_i + a \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} \right) + \\
& \quad + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} \right) + \dot{a} \cdot b_{11i} - \dot{X}_{Gj} - \\
& \quad - \dot{\beta}_j \cdot \left( -x_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j + z_{ji} \cdot \cos \beta_j \right) - \\
& \quad - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j} \right) = 0 \\
& \dot{Y}_{Gi} + \dot{a} \cdot b_{21i} - \dot{\alpha}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i} - a \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \alpha_i} \right) + \\
& \quad + \dot{\beta}_i \cdot \left[ \left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} \right) \cdot \sin \alpha_i + a \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \beta_i} \right] + \\
& \quad + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \gamma_i} \right) - \dot{Y}_{Gj} + \\
& \quad + \dot{\alpha}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j} \right) - \\
& \quad - \dot{\beta}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j} \right) \cdot \sin \alpha_j - \\
& \quad - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j} \right) = 0 \\
& \dot{Z}_{Gi} + \dot{\alpha}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} \right) - \\
& \quad - \dot{\beta}_i \cdot \left[ \left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} \right) \cdot \cos \alpha_i - a \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} \right] + \\
& \quad + \dot{a} \cdot b_{31i} + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i} + a \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} \right) - \dot{Z}_{Gj} - \\
& \quad - \dot{\alpha}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j} \right) + \\
& \quad + \dot{\beta}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j} \right) \cdot \cos \alpha_j - \\
& \quad - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j} \right) = 0 \\
& \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} - \left( \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \gamma_j} \right) = 0 \\
& \dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} - \left( \dot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \alpha_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \gamma_j} \right) = 0 \quad (3.8)
\end{aligned}$$

### 3.1.2. A forgó csukló

A forgó csuklóval kapcsolt kinematikai pár sebességeit meghatározó kényszer-egyenletek könnyen meghatározhatók a hengeres csukló kényszer-egyenleteiből. A forgó csukló esetében az „a” paraméter állandó, tehát az  $\dot{a} = 0$ , így a (3.8) egyenletrendszer a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned}
& \dot{X}_{Gi} + \dot{\beta}_i \cdot \left( -x_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i + y_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \cos \beta_i + a \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} \right) + \\
& \quad + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} \right) - \dot{X}_{Gj} - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ij} \cdot \alpha_{1j} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{\beta}_j \cdot (-x_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j + z_{ji} \cdot \cos \beta_j) = 0 \\
\dot{Y}_{Gi} - \dot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i} - a \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \alpha_i}) + \\
& + \dot{\beta}_i \cdot \left[ (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \sin \alpha_i + a \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \beta_i} \right] + \\
& + \dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \gamma_i}) - \dot{Y}_{Gj} + \\
& + \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) - \\
& - \dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \\
& - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j}) = 0 \\
\dot{Z}_{Gi} + \dot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i}) - \\
& - \dot{\beta}_i \cdot \left[ (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \cos \alpha_i - a \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} \right] + \\
& + \dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i} + a \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i}) - \dot{Z}_{Gj} - \\
& - \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j}) + \\
& + \dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \cos \alpha_j - \\
& - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j}) = 0 \\
\dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} - \left( \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \gamma_j} \right) = 0 \\
\dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} - \left( \dot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \alpha_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \gamma_j} \right) = 0 \quad (3.9)
\end{aligned}$$

### 3.1.3. A csúszka (keresztfej)

A csúszkával kapcsolt kinematikai pár sebességeit meghatározó kényszer egyenletek részben megegyeznek a hengeres csuklókra meghatározott kényszer egyenletekkel. A (3.8) egyenletekhez még hozzá kell rendelni, akárcsak a helyzetek meghatározásakor, a (3.10) feltételt, amellyel nullázzuk a két tag között fellépő relatív szögsebességet.

$$\dot{\alpha}_i^* = \dot{\alpha}_j^* \text{ illetve } \dot{b}_{33i} - \dot{b}_{33j} = 0 \quad (3.10)$$

Az így alkotott rendszer a következő:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_{Gi} + \dot{\beta}_i \cdot (-x_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i + y_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \cos \beta_i + a \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i}) + \\
+ \dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i}) + \dot{a} \cdot b_{11i} - \dot{X}_{Gj} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{\beta}_j \cdot (-x_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j + z_{ji} \cdot \cos \beta_j) - \\
& -\dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j}) = 0 \\
\dot{Y}_{Gi} + \dot{a} \cdot b_{21i} - \dot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i} - a \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \alpha_i}) + \\
& + \dot{\beta}_i \cdot [(x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \sin \alpha_i + a \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \beta_i}] + \\
& + \dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \gamma_i}) - \dot{Y}_{Gj} + \\
& + \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) - \\
& - \dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \\
& - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j}) = 0 \\
\dot{Z}_{Gi} + \dot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i}) - \\
& - \dot{\beta}_i \cdot [(x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \cos \alpha_i - a \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i}] + \dot{a} \cdot b_{31i} + \\
& + \dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i} + a \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i}) - \dot{Z}_{Gj} - \\
& - \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j}) + \\
& + \dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \cos \alpha_j - \\
& - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j}) = 0 \\
\dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} - \left( \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \gamma_j} \right) = 0 \\
\dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} - \left( \dot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \alpha_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \gamma_j} \right) = 0 \\
\dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \beta_i} - \left( \dot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \alpha_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \beta_j} \right) = 0 \tag{3.11}
\end{aligned}$$

### 3.1.4. A gömbcsukló

A gömbcsuklóval kapcsolt tagok sebességeit az „a” távolság zérus értékére felírt (3.1) egyenletrendszerből kapjuk. Ha ebbe a rendszerbe behelyettesítjük a (3.2) képleteket, majd a tagokat megfelelően csoportosítjuk, azt a sajátos eredményt kapjuk, hogy a gömbcsukló kényszer egyenletei függetlenek a tagokhoz tartozó segédrendszerek egymáshoz viszonyított helyzetétől, tehát a segédrendszerek bármely tengelyének egybeesésére ugyanaz marad. Ez a rendszer az alábbi:

$$\begin{aligned}
& \dot{X}_{Gi} + \dot{\beta}_i \cdot (-x_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i + y_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \cos \beta_i) + \\
& \quad + \dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i}) - \dot{X}_{Gj} + \\
& \quad + \dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j - y_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j - z_{ji} \cdot \cos \beta_j) - \\
& \quad - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j}) = 0 \\
& \dot{Y}_{Gi} - \dot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) + \\
& \quad + \dot{\beta}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \sin \alpha_i + \dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i}) - \\
& \quad - \dot{Y}_{Gj} + \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) - \\
& \quad - \dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \\
& \quad - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j}) = 0 \\
& \dot{Z}_{Gi} + \dot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i}) - \\
& \quad - \dot{\beta}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \cos \alpha_i + \\
& \quad + \dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i}) - \dot{Z}_{Gj} - \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j}) + \\
& \quad + \dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \cos \alpha_j - \\
& \quad - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j}) = 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

### 3.1.5. Az egytetemes csukló

Az egytetemes csukló sebességeit meghatározó kényszer egyenleteket a (2.27) egyenlet idő szerinti deriválása után kapjuk, amely a következő:

$$\dot{b}_{11i} \cdot b_{12j} + \dot{b}_{21i} \cdot b_{22j} + \dot{b}_{31i} \cdot b_{32j} + b_{11i} \cdot \dot{b}_{12j} + b_{21i} \cdot \dot{b}_{22j} + b_{31i} \cdot \dot{b}_{32j} = 0 \tag{3.13}$$

A (3.13) egyenlet a (3.3) és a (3.4) egyenlőségekkel a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned}
& \dot{\alpha}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{11i}}{\partial \alpha_i} \cdot b_{12j} + \frac{\partial b_{21i}}{\partial \alpha_i} \cdot b_{22j} + \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} \cdot b_{32j} \right] + \\
& \quad + \dot{\beta}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} \cdot b_{12j} + \frac{\partial b_{21i}}{\partial \beta_i} \cdot b_{22j} + \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} \cdot b_{32j} \right] + \\
& \quad + \dot{\gamma}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} \cdot b_{12j} + \frac{\partial b_{21i}}{\partial \gamma_i} \cdot b_{22j} + \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} \cdot b_{32j} \right] + \\
& \quad + \dot{\alpha}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{12j}}{\partial \alpha_j} \cdot b_{11i} + \frac{\partial b_{22j}}{\partial \alpha_j} \cdot b_{21i} + \frac{\partial b_{32j}}{\partial \alpha_j} \cdot b_{31i} \right] + \\
& \quad + \dot{\beta}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{12j}}{\partial \beta_j} \cdot b_{11i} + \frac{\partial b_{22j}}{\partial \beta_j} \cdot b_{21i} + \frac{\partial b_{32j}}{\partial \beta_j} \cdot b_{31i} \right] + \\
& \quad + \dot{\gamma}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{12j}}{\partial \gamma_j} \cdot b_{11i} + \frac{\partial b_{22j}}{\partial \gamma_j} \cdot b_{21i} + \frac{\partial b_{32j}}{\partial \gamma_j} \cdot b_{31i} \right] = 0
\end{aligned} \tag{3.14}$$

A (3.12) és a (3.14) egyenleteket rendszerbe foglalva az egyetemes csuklóval kapcsolt kinematikai pár sebességeit meghatározó kényszer egyenletekhez jutunk, azaz:

$$\begin{aligned}
& \dot{X}_{Gi} + \dot{\beta}_i \cdot (-x_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i + y_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \cos \beta_i) + \\
& \quad + \dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i}) - \dot{X}_{Gj} - \\
& \quad - \dot{\beta}_j \cdot (-x_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j + z_{ji} \cdot \cos \beta_j) - \\
& \quad - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j}) = 0 \\
& \dot{Y}_{Gi} - \dot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) + \\
& \quad + \dot{\beta}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \sin \alpha_i + \dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i}) - \\
& \quad - \dot{Y}_{Gj} + \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) - \\
& \quad - \dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \\
& \quad - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j}) = 0 \\
& \dot{Z}_{Gi} + \dot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i}) - \\
& \quad - \dot{\beta}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \cos \alpha_i + \dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i}) - \\
& \quad - \dot{Z}_{Gj} - \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j}) + \\
& \quad + \dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \cos \alpha_j - \\
& \quad - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j}) = 0 \\
& \dot{\alpha}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{11i}}{\partial \alpha_i} \cdot b_{12j} + \frac{\partial b_{21i}}{\partial \alpha_i} \cdot b_{22j} + \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} \cdot b_{32j} \right] + \\
& \quad + \dot{\beta}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} \cdot b_{12j} + \frac{\partial b_{21i}}{\partial \beta_i} \cdot b_{22j} + \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} \cdot b_{32j} \right] + \\
& \quad + \dot{\gamma}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} \cdot b_{12j} + \frac{\partial b_{21i}}{\partial \gamma_i} \cdot b_{22j} + \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} \cdot b_{32j} \right] + \\
& \quad + \dot{\alpha}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{12j}}{\partial \alpha_j} \cdot b_{11i} + \frac{\partial b_{22j}}{\partial \alpha_j} \cdot b_{21i} + \frac{\partial b_{32j}}{\partial \alpha_j} \cdot b_{31i} \right] + \\
& \quad + \dot{\beta}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{12j}}{\partial \beta_j} \cdot b_{11i} + \frac{\partial b_{22j}}{\partial \beta_j} \cdot b_{21i} + \frac{\partial b_{32j}}{\partial \beta_j} \cdot b_{31i} \right] + \\
& \quad + \dot{\gamma}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{12j}}{\partial \gamma_j} \cdot b_{11i} + \frac{\partial b_{22j}}{\partial \gamma_j} \cdot b_{21i} + \frac{\partial b_{32j}}{\partial \gamma_j} \cdot b_{31i} \right] = 0 \tag{3.15}
\end{aligned}$$

### 3.1.6. A menetes csukló

A menetes csukló által kapcsolt tagok sebességének meghatározása céljából a hengeres csukó egyenleteit használjuk, amelyekhez hozzárendeljük a (2.33) és a (2.34) egyenletek deriváltjai által kapott feltételeket.

## 3. A SEBESSÉGEK KÉNYSZEREGYENLETEI

$$\dot{\varphi}_\alpha = \dot{\alpha}_i^* - \dot{\alpha}_j^* \quad (3.16)$$

$$\dot{a} = \frac{p}{2\pi} (\dot{\alpha}_i^* - \dot{\alpha}_j^*) \quad (3.17)$$

A térben mozgó „i” és „j” tagokhoz tartozó segédrendszerek az egybeeső  $O_{ij}^* x_i^*$  és  $O_{ji}^* x_j^*$  tengelyek körül,  $\dot{\alpha}_i^*$  és  $\dot{\alpha}_j^*$  szögsebességgel forognak egy külső rögzített koordináta-rendszerhez viszonyítva. Ezek a szögsebességek a (2.35) és a (2.36) egyenletek deriváltjaival fejezhetők ki, azaz:

$$\frac{d\alpha_i^*}{dt} = \dot{\alpha}_i^* = - \left( \frac{\dot{b}_{23i} \cdot b_{33i} - b_{23i} \cdot \dot{b}_{33i}}{b_{23i}^2 + b_{33i}^2} \right) \quad (3.18)$$

$$\frac{d\alpha_j^*}{dt} = \dot{\alpha}_j^* = - \left( \frac{\dot{b}_{23j} \cdot b_{33j} - b_{23j} \cdot \dot{b}_{33j}}{b_{23j}^2 + b_{33j}^2} \right) \quad (3.19)$$

A menetes csuklóhoz tartozó tagok sebességeinek kényszer egyenletei a következők:

$$\begin{aligned} \dot{X}_{Gi} + \dot{\beta}_i \cdot \left( -x_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i + y_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \cos \beta_i + a \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} \right) + \\ + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} \right) + \dot{a} \cdot b_{11i} - \dot{X}_{Gj} - \\ - \dot{\beta}_j \cdot \left( -x_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j + z_{ji} \cdot \cos \beta_j \right) - \\ - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{Gi} + \dot{a} \cdot b_{21i} - \dot{\alpha}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i} - a \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \alpha_i} \right) + \\ + \dot{\beta}_i \cdot \left[ \left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} \right) \cdot \sin \alpha_i + a \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \beta_i} \right] + \\ + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \gamma_i} \right) - \dot{Y}_{Gj} + \\ + \dot{\alpha}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j} \right) - \\ - \dot{\beta}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j} \right) \cdot \sin \alpha_j - \\ - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{Gi} + \dot{\alpha}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} \right) - \\ - \dot{\beta}_i \cdot \left[ \left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} \right) \cdot \cos \alpha_i - a \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} \right] + \dot{a} \cdot b_{31i} + \\ + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i} + a \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} \right) - \dot{Z}_{Gj} - \\ - \dot{\alpha}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j} \right) + \\ + \dot{\beta}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j} \right) \cdot \cos \alpha_j - \\ - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} - \left( \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \gamma_j} \right) &= 0 \\
 \dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \gamma_i} - \left( \dot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \alpha_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \gamma_j} \right) &= 0 \\
 \dot{a} + \frac{p}{2\pi} \left[ \left( \frac{b_{23i}b_{33i} - b_{23i}\dot{b}_{33i}}{b_{23i}^2 + b_{33i}^2} \right) - \left( \frac{b_{23j}b_{33j} - b_{23j}\dot{b}_{33j}}{b_{23j}^2 + b_{33j}^2} \right) \right] &= 0
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

ahol

$$\begin{aligned}
 \dot{b}_{23i} &= \dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \gamma_i} \\
 \dot{b}_{33j} &= \dot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \alpha_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \gamma_j}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

### 3.2. A sebességek kényszer egyenletei az $O_{ij}^*y_i^*$ és az $O_{ji}^*y_j^*$ tengelyek egybeesésekor

Az  $O_{ij}^*y_i^* \equiv O_{ji}^*y_j^*$  tengelyek egybeesésekor is a kényszer egyenleteket a 2.4. ábra szerint határozzuk meg. Ebben az esetben a (2.39) mátrix egyenlet idő szerinti deriváltja a következő:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{1i} & \dot{\beta}_{1i} & \dot{\gamma}_{1i} & \dot{X}_{Gi} \\ \dot{\alpha}_{2i} & \dot{\beta}_{2i} & \dot{\gamma}_{2i} & \dot{Y}_{Gi} \\ \dot{\alpha}_{3i} & \dot{\beta}_{3i} & \dot{\gamma}_{3i} & \dot{Z}_{Gi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \\ 1 \end{bmatrix} + \dot{a} \cdot \begin{bmatrix} b_{12i} \\ b_{22i} \\ b_{32i} \\ 0 \end{bmatrix} + \\
 + \dot{a} \cdot \begin{bmatrix} \dot{b}_{12i} \\ \dot{b}_{22i} \\ \dot{b}_{32i} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{1j} & \dot{\beta}_{1j} & \dot{\gamma}_{1j} & \dot{X}_{Gj} \\ \dot{\alpha}_{2j} & \dot{\beta}_{2j} & \dot{\gamma}_{2j} & \dot{Y}_{Gj} \\ \dot{\alpha}_{3j} & \dot{\beta}_{3j} & \dot{\gamma}_{3j} & \dot{Z}_{Gj} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{ji} \\ y_{ji} \\ z_{ji} \\ 1 \end{bmatrix} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

#### 3.2.1. A henger alakú csukló

A henger alakú csukló sebességeinek első három kényszer egyenletét a (2.91) mátrix egyenlet adja. Az  $O_{ij}^*y_i^* \equiv O_{ji}^*y_j^*$  egytengelyűség feltételeinek deriváltjait pedig a (2.1) egyenlőségekből választjuk ki, amelyek a (2.46) képletek deriváltjai-val is kifejezhetők:

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha}_i^* &= \dot{\alpha}_j^* \\
 \dot{\gamma}_i^* &= \dot{\gamma}_j^*
 \end{aligned}$$

illetve



## 3. A SEBESSÉGEK KÉNYSZEREGYENLETEI

$$\begin{aligned}\dot{b}_{32i} &= \dot{b}_{32j} \\ \dot{b}_{12i} &= \dot{b}_{12j}\end{aligned}\quad (3.23)$$

A (2.6) és a (2.7) egyenlőségekkel a (3.22) mátrixegyenletet és a (3.23) feltételeket az ismeretlenek szerint csoportosítás után kifejezett egyenletrendszeralakra hozzuk. A kényszeregyenletekből alkotott rendszer a következő:

$$\begin{aligned}\dot{X}_{Gi} + \dot{\beta}_i \cdot \left( -x_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i + y_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \cos \beta_i + a \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} \right) + \\ + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} \right) + \dot{a} \cdot b_{12i} - \dot{X}_{Gj} - \\ - \dot{\beta}_j \cdot \left( -x_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j + z_{ji} \cdot \cos \beta_j \right) - \\ - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j} \right) = 0 \\ \dot{Y}_{Gi} + \dot{a} \cdot b_{22i} - \dot{\alpha}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i} - a \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \alpha_i} \right) + \\ + \dot{\beta}_i \cdot \left[ \left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} \right) \cdot \sin \alpha_i + a \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \beta_i} \right] + \\ + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \gamma_i} \right) - \dot{Y}_{Gj} + \\ + \dot{\alpha}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j} \right) - \\ - \dot{\beta}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j} \right) \cdot \sin \alpha_j - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j} \right) = 0 \\ \dot{Z}_{Gi} + \dot{\alpha}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} \right) - \\ - \dot{\beta}_i \cdot \left[ \left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} \right) \cdot \cos \alpha_i - a \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} \right] + \\ + \dot{a} \cdot b_{32i} + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i} + a \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} \right) - \dot{Z}_{Gj} - \\ - \dot{\alpha}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j} \right) + \\ + \dot{\beta}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j} \right) \cdot \cos \alpha_j - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j} \right) = 0 \\ \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} - \left( \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{12j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{12j}}{\partial \gamma_j} \right) = 0 \\ \dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} - \left( \dot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \alpha_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \gamma_j} \right) = 0\end{aligned}\quad (3.24)$$

A hengeres csuklóval kapcsolt tagok sebességeinek meghatározására írt (3.24) kényszeregyenletekből alkotott rendszerben a parciális deriváltak függvényeit a (3.4) egyenlőségek szerint kell értelmezni, a programban pedig, mint ismert függvényt, előre meg kell határozni az adatbázisba beírt iterációk szerinti szögek összes értékeire.

### 3.2.2. A forgó csukló

Az  $O_i^* y_i^* \equiv O_j^* y_j^*$  tengely körül forgó csuklóval kapcsolt kinematikai pár sebességeit meghatározó kényszer egyenletek a (2.43) rendszer deriváltjaiból állnak. Ebben az esetben az „a” paraméter állandó, illetve  $\dot{a} = 0$ .

Ezzel a feltétellel a (3.24) hengeres csuklóra írt rendszer a forgó csukló sebességét meghatározó kényszer egyenletek rendszerévé alakul át, azaz:

$$\begin{aligned}
& \dot{X}_{Gi} + \dot{\beta}_i \cdot \left( -x_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i + y_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \cos \beta_i + a \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} \right) + \\
& \quad + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} \right) - \dot{X}_{Gj} - \\
& \quad - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j} \right) - \\
& \quad - \dot{\beta}_j \cdot \left( -x_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j + z_{ji} \cdot \cos \beta_j \right) - \\
& \quad - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j} \right) = 0 \\
& \dot{Y}_{Gi} - \dot{\alpha}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i} - a \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \alpha_i} \right) + \\
& \quad + \dot{\beta}_i \cdot \left[ \left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} \right) \cdot \sin \alpha_i + a \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \beta_i} \right] + \\
& \quad + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \gamma_i} \right) - \dot{Y}_{Gj} + \\
& \quad + \dot{\alpha}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j} \right) - \\
& \quad - \dot{\beta}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j} \right) \cdot \sin \alpha_j - \\
& \quad - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j} \right) = 0 \\
& \dot{Z}_{Gi} + \dot{\alpha}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} \right) - \\
& \quad - \dot{\beta}_i \cdot \left[ \left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} \right) \cdot \cos \alpha_i - a \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} \right] + \\
& \quad + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i} + a \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} \right) - \dot{Z}_{Gj} - \\
& \quad - \dot{\alpha}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j} \right) + \\
& \quad + \dot{\beta}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j} \right) \cdot \cos \alpha_j - \\
& \quad - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j} \right) = 0 \\
& \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} - \left( \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{12j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{12j}}{\partial \gamma_j} \right) = 0 \\
& \dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} - \left( \dot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \alpha_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \gamma_j} \right) = 0 \quad (3.25)
\end{aligned}$$

### 3.2.3. A csúszka (keresztfej)

A csúszkával kapcsolt kinematikai pár sebességeinek kényszer egyenletei részben megegyeznek a (3.24) hengeres csuklók kényszer egyenleteivel. A (3.24) egyenletekhez még hozzá kell rendelni a (3.26) feltételt, amely nullázza a két tag közötti relatív szögsebességet.

$$\dot{\beta}_i^* = \dot{\beta}_j^* \quad \text{illetve} \quad \dot{b}_{33i} - \dot{b}_{33j} = 0 \quad \text{vagy} \quad \dot{b}_{13i} - \dot{b}_{13j} = 0 \quad (3.26)$$

A csúszka sebességeinek egyenletrendszere a következő:

$$\begin{aligned} & \dot{X}_{Gi} + \dot{\beta}_i \cdot \left( -x_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i + y_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \cos \beta_i + a \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} \right) + \\ & + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} \right) + \dot{a} \cdot b_{12i} - \dot{X}_{Gj} - \\ & - \dot{\beta}_j \cdot \left( -x_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j + z_{ji} \cdot \cos \beta_j \right) - \\ & - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j} \right) = 0 \\ \\ & \dot{Y}_{Gi} + \dot{a} \cdot b_{22i} - \dot{\alpha}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i} - a \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \alpha_i} \right) + \\ & + \dot{\beta}_i \cdot \left[ \left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} \right) \cdot \sin \alpha_i + a \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \beta_i} \right] + \\ & + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \gamma_i} \right) - \dot{Y}_{Gj} + \\ & + \dot{\alpha}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j} \right) - \\ & - \dot{\beta}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j} \right) \cdot \sin \alpha_j - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j} \right) = 0 \\ \\ & \dot{Z}_{Gi} + \dot{\alpha}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} \right) - \\ & - \dot{\beta}_i \cdot \left[ \left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} \right) \cdot \cos \alpha_i - a \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} \right] + \\ & + \dot{a} \cdot b_{32i} + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i} + a \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} \right) - \dot{Z}_{Gj} - \\ & - \dot{\alpha}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j} \right) + \\ & + \dot{\beta}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j} \right) \cdot \cos \alpha_j - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j} \right) = 0 \\ \\ & \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} - \left( \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{12j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{12j}}{\partial \gamma_j} \right) = 0 \\ \\ & \dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} - \left( \dot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \alpha_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \gamma_j} \right) = 0 \\ \\ & \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \gamma_i} - \left( \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \gamma_j} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

### 3.2.4. A gömbcsukló

A gömbcsukló kényszeregyenletei nem függenek a segédrendszerek egymáshoz viszonyított helyzetétől, mint ahogyan azt a 3.14. alfejezetben meghatároztuk, a gömbcsuklóval kapcsolt tagok sebességeit ebben az esetben is a (3.12) egyenletrendszerrel kell meghatározni.

### 3.2.5. Az egyetemes csukló

Az egyetemes csukló sebességeire írt kényszeregyenletek sajátos alakját a (2.25) egyenlet idő szerinti deriválásával kapjuk, amely:

$$\dot{b}_{12i} \cdot b_{13j} + \dot{b}_{22i} \cdot b_{23j} + \dot{b}_{32i} \cdot b_{33j} + b_{12i} \cdot \dot{b}_{13j} + b_{22i} \cdot \dot{b}_{23j} + b_{32i} \cdot \dot{b}_{33j} = 0 \quad (3.28)$$

A (3.28) feltételt a (3.3) és a (3.4) egyenlőségek figyelembevételével, megfelelő csoportosítással a következőképpen írhatjuk:

$$\begin{aligned} & \dot{\alpha}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{12i}}{\partial \alpha_i} \cdot b_{13j} + \frac{\partial b_{22i}}{\partial \alpha_i} \cdot b_{23j} + \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} \cdot b_{33j} \right] + \\ & + \dot{\beta}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} \cdot b_{13j} + \frac{\partial b_{22i}}{\partial \beta_i} \cdot b_{23j} + \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} \cdot b_{33j} \right] + \\ & + \dot{\gamma}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} \cdot b_{13j} + \frac{\partial b_{22i}}{\partial \gamma_i} \cdot b_{23j} + \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} \cdot b_{33j} \right] + \\ & + \dot{\alpha}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{13j}}{\partial \alpha_j} \cdot b_{12i} + \frac{\partial b_{23j}}{\partial \alpha_j} \cdot b_{22i} + \frac{\partial b_{33j}}{\partial \alpha_j} \cdot b_{32i} \right] + \\ & + \dot{\beta}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{13j}}{\partial \beta_j} \cdot b_{12i} + \frac{\partial b_{23j}}{\partial \beta_j} \cdot b_{22i} + \frac{\partial b_{33j}}{\partial \beta_j} \cdot b_{32i} \right] + \\ & + \dot{\gamma}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{13j}}{\partial \gamma_j} \cdot b_{12i} + \frac{\partial b_{23j}}{\partial \gamma_j} \cdot b_{22i} + \frac{\partial b_{33j}}{\partial \gamma_j} \cdot b_{32i} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

A (3.29) feltétel és a (3.12) egyenletek együttesen az egyetemes csuklókhoz tartozó tagok sebességeit, meghatározó rendszert alkotják, azaz:

$$\begin{aligned} & \dot{X}_{Gi} + \dot{\beta}_i \cdot (-x_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i + y_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \cos \beta_i) + \\ & + \dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i}) - \dot{X}_{Gj} - \\ & - \dot{\beta}_j \cdot (-x_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j + z_{ji} \cdot \cos \beta_j) - \\ & - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dot{Y}_{Gi} - \dot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) + \\ & + \dot{\beta}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \sin \alpha_i + \\ & + \dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i}) - \dot{Y}_{Gj} + \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) - \\ & - \dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dot{Z}_{Gi} + \dot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i}) - \\
& \quad - \dot{\beta}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \cos \alpha_i + \\
& \quad + \dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i}) - \dot{Z}_{Gj} - \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j}) + \\
& \quad + \dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \cos \alpha_j - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j}) = 0 \\
& \dot{\alpha}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{12i}}{\partial \alpha_i} \cdot b_{13j} + \frac{\partial b_{22i}}{\partial \alpha_i} \cdot b_{23j} + \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} \cdot b_{33j} \right] + \\
& \quad + \dot{\beta}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} \cdot b_{13j} + \frac{\partial b_{22i}}{\partial \beta_i} \cdot b_{23j} + \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} \cdot b_{33j} \right] + \\
& \quad + \dot{\gamma}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} \cdot b_{13j} + \frac{\partial b_{22i}}{\partial \gamma_i} \cdot b_{23j} + \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} \cdot b_{33j} \right] + \\
& \quad + \dot{\alpha}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{13j}}{\partial \alpha_j} \cdot b_{12i} + \frac{\partial b_{23j}}{\partial \alpha_j} \cdot b_{22i} + \frac{\partial b_{33j}}{\partial \alpha_j} \cdot b_{32i} \right] + \\
& \quad + \dot{\beta}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{13j}}{\partial \beta_j} \cdot b_{12i} + \frac{\partial b_{23j}}{\partial \beta_j} \cdot b_{22i} + \frac{\partial b_{33j}}{\partial \beta_j} \cdot b_{32i} \right] + \\
& \quad + \dot{\gamma}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{13j}}{\partial \gamma_j} \cdot b_{12i} + \frac{\partial b_{23j}}{\partial \gamma_j} \cdot b_{22i} + \frac{\partial b_{33j}}{\partial \gamma_j} \cdot b_{32i} \right] = 0 \tag{3.30}
\end{aligned}$$

### 3.2.6. A menetes csukló

A menetes csukló tagjai sebességének meghatározása céljából a hengeres csukló egyenleteit használjuk, amelyekhez hozzárendeljük a (2.33) és a (2.34) egyenletek deriváltjai által kapott feltételeket.

$$\dot{\varphi}_\beta = \dot{\beta}_i^* - \dot{\beta}_j^* \tag{3.31}$$

$$\dot{a} = \frac{p}{2\pi} (\dot{\beta}_i^* - \dot{\beta}_j^*) \tag{3.32}$$

Az egymásra helyezett  $O_{ij}^* y_j^*$  és  $O_{ji}^* y_i^*$  tengelyek körül „i” és „j” tagokhoz tartozó segédkoordináta-rendszerek  $\dot{\beta}_i^*$  és  $\dot{\beta}_j^*$  szögsebességgel forognak egy külső rögzített koordináta-rendszerhez viszonyítva. Ezek a szögsebességek (2.52) és a (2.53) képletek deriváltjai, amelyek alakja a következő:

$$\frac{d\beta_i^*}{dt} = \dot{\beta}_i^* = \frac{d}{dt} \arcsin(b_{13i}) = \frac{\dot{b}_{13i}}{\sqrt{1-b_{13i}^2}} \tag{3.33}$$

$$\frac{d\beta_j^*}{dt} = \dot{\beta}_j^* = \frac{d}{dt} \arcsin(b_{13j}) = \frac{\dot{b}_{13j}}{\sqrt{1-b_{13j}^2}} \tag{3.34}$$

$$\dot{a} = \frac{p}{2\pi} \cdot \left( \frac{\dot{b}_{13i}}{\sqrt{1-b_{13i}^2}} - \frac{\dot{b}_{13j}}{\sqrt{1-b_{13j}^2}} \right) \tag{3.35}$$

A fenti képletek alakja módosul, amennyiben a (3.5) egyenleteket figyelembe vesszük, mivel ezekkel még felírható, hogy:

$$\dot{b}_{13i} = \frac{db_{13i}}{dt} = \dot{\beta}_i \frac{\partial b_{13i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \gamma_i} \quad (3.36)$$

$$\dot{b}_{13j} = \frac{db_{13j}}{dt} = \dot{\beta}_j \frac{\partial b_{13j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \gamma_j} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \dot{a} - \dot{\beta}_i \cdot \frac{p}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-b_{13i}^2}} \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \beta_i} - \dot{\gamma}_i \cdot \frac{p}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-b_{13i}^2}} \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \gamma_i} + \\ + \left( \dot{\beta}_j \cdot \frac{p}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-b_{13j}^2}} \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{p}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-b_{13j}^2}} \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \gamma_j} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Az  $O_{ij}^* \gamma_i^* \equiv O_{ij}^* \gamma_j^*$  tengelyek körül forgó menetes csukló sebességeinek kényszer-egyenletei a (3.16) és a (3.30) egyenletekből állnak:

$$\begin{aligned} \dot{X}_{Gi} + \dot{\beta}_i \cdot \left( -x_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i + y_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \cos \beta_i + a \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} \right) + \\ + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} \right) + \dot{a} \cdot b_{12i} - \dot{X}_{Gj} - \\ - \dot{\beta}_j \cdot \left( -x_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j + z_{ji} \cdot \cos \beta_j \right) - \\ - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{Gi} + \dot{a} \cdot b_{22i} - \dot{\alpha}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i} - a \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \alpha_i} \right) + \\ + \dot{\beta}_i \cdot \left[ \left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} \right) \cdot \sin \alpha_i + a \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \beta_i} \right] + \\ + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \gamma_i} \right) - \dot{Y}_{Gj} + \\ + \dot{\alpha}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j} \right) - \\ - \dot{\beta}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j} \right) \cdot \sin \alpha_j - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{Z}_{Gi} + \dot{\alpha}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} \right) - \\ - \dot{\beta}_i \cdot \left[ \left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} \right) \cdot \cos \alpha_i - a \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} \right] + \\ + \dot{a} \cdot b_{32i} + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i} + a \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} \right) - \dot{Z}_{Gj} - \\ - \dot{\alpha}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j} \right) + \\ + \dot{\beta}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j} \right) \cdot \cos \alpha_j - \dot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} - \left( \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{12j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{12j}}{\partial \gamma_j} \right) = 0$$

## 3. A SEBESSÉGEK KÉNYSZEREGYENLETEI

$$\begin{aligned}
& \dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} - \left( \dot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \alpha_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \gamma_j} \right) = 0 \\
& \dot{a} - \dot{\beta}_i \cdot \frac{p}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-b_{13i}^2}} \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \beta_i} - \dot{\gamma}_i \cdot \frac{p}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-b_{13i}^2}} \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \gamma_i} + \\
& \quad + \left( \dot{\beta}_j \cdot \frac{p}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-b_{13j}^2}} \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{p}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-b_{13j}^2}} \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \gamma_j} \right) = 0 \tag{3.39}
\end{aligned}$$

*Megjegyzés:*

Az egytetemes csukló sebességeinek kiszámítására írt feltételek deriváltjai általános alakban vannak felírva.

A kényszeregyenletekbe foglalt ismeretlenek halmazát az  $i$ -edik és a  $j$ -edik test tömegközéppontjának  $\dot{X}_{Gi}, \dot{Y}_{Gi}, \dot{Z}_{Gi}$ , illetve  $\dot{X}_{Gj}, \dot{Y}_{Gj}, \dot{Z}_{Gj}$  lineáris sebességei és a központi tehetetlenségi főténgelyek  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  szögeinek az  $\dot{\alpha}_i, \dot{\beta}_i, \dot{\gamma}_i, \dot{\alpha}_j, \dot{\beta}_j, \dot{\gamma}_j$  deriváltjai alkotják. Ezek a géptörzshöz rögzített OXYZ rendszerben vannak értelmezve.

A szögsebességek  $\omega_{xi}, \omega_{yi}, \omega_{zi}, \omega_{xj}, \omega_{yj}, \omega_{zj}$  alkotóit a központi tehetetlenségi főténgelyek rendszerében kell kiszámítani, a sebességek programjához csatolt (1.37) mátrixegyenlettel. A sebességek egyenletrendszere lineáris, tehát az egyenletek száma minden esetben egyenlő kell legyen az ismeretlenek számával.

## 4. A GYORSULÁSOK KÉNYSZEREGYENLETEI

### 4.1. A gyorsulások kényszer egyenletei az $O_{ij}^*x_i^*$ és az $O_{ji}^*x_j^*$ tengelyek egybeesésekor

A gyorsulások kényszer egyenleteit, amelyek a mechanizmust alkotó tagok lineáris és szöggyorsulásait meghatározzák, a (3.1) mátrixegyenlet, illetve az  $O_{ij}^*x_i^* \equiv O_{ji}^*x_j^*$  tengelyekre írt sebességek kényszer egyenleteinek és feltételeinek idő szerinti deriváltjai szerint írjuk fel.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_{1i} & \ddot{\beta}_{1i} & \ddot{\gamma}_{1i} & \ddot{X}_{Gi} \\ \ddot{\alpha}_{2i} & \ddot{\beta}_{2i} & \ddot{\gamma}_{2i} & \ddot{Y}_{Gi} \\ \ddot{\alpha}_{3i} & \ddot{\beta}_{3i} & \ddot{\gamma}_{3i} & \ddot{Z}_{Gi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \\ 1 \end{bmatrix} + \ddot{a} \cdot \begin{bmatrix} b_{11i} \\ b_{21i} \\ b_{31i} \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \dot{a} \cdot \begin{bmatrix} \dot{b}_{11i} \\ \dot{b}_{21i} \\ \dot{b}_{31i} \\ 0 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} \ddot{b}_{11i} \\ \ddot{b}_{21i} \\ \ddot{b}_{31i} \\ 0 \end{bmatrix} - \\ & - \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_{1j} & \ddot{\beta}_{1j} & \ddot{\gamma}_{1j} & \ddot{X}_{Gj} \\ \ddot{\alpha}_{2j} & \ddot{\beta}_{2j} & \ddot{\gamma}_{2j} & \ddot{Y}_{Gj} \\ \ddot{\alpha}_{3j} & \ddot{\beta}_{3j} & \ddot{\gamma}_{3j} & \ddot{Z}_{Gj} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{ji} \\ y_{ji} \\ z_{ji} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Figyelembe véve, hogy az iránykoszinuszok második deriváltja nagyon sok változót tartalmaz, méretileg terjedelmes és nehezen követhető, programozásnál ellenőrizhetetlen formát kap. Ezért az előző programokban meghatározott változók értékeit a továbbiakban a jelölésénél, ismert függvényként kezeljük. Ezáltal a kinematikai párokra felírt kényszer egyenletek helyessége követhetővé és ezáltal ellenőrizhetővé válik.

A fenti mátrixegyenletben az iránytényezőök másodrendű deriváltjait a (3.2) egyenlőségek idő szerinti deriválásával állítjuk elő. Ezek a következők:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_{1i} &= -\ddot{\beta}_i \cdot \sin \beta_i \cos \gamma_i + \ddot{\gamma}_i \cdot \cos \beta_i \sin \gamma_i + 2\dot{\beta}_i \dot{\gamma}_i \sin \beta_i \sin \gamma_i - \\ & - (\dot{\beta}_i^2 + \dot{\gamma}_i^2) \cos \beta_i \cos \gamma_i = -\ddot{\beta}_i \cdot \cos \gamma_{1i}(\beta_i) \cdot \cos \gamma_i + \ddot{\gamma}_i \cdot \cos \beta_{1i}(\beta_i, \gamma_i) + \\ & + 2\dot{\beta}_i \dot{\gamma}_i \cos \gamma_{1i}(\beta_i) \cdot \sin \gamma_i - (\dot{\beta}_i^2 + \dot{\gamma}_i^2) \cdot \cos \alpha_{1i}(\beta_i, \gamma_i) = \\ & = -\ddot{\beta}_i \cdot \gamma_{1i} \cos \gamma_i + \ddot{\gamma}_i \cdot \beta_{1i} + 2\dot{\beta}_i \cdot \dot{\gamma}_i \cdot \gamma_{1i} \sin \gamma_i - (\dot{\beta}_i^2 + \dot{\gamma}_i^2) \cdot \alpha_{1i} \\ \ddot{\beta}_{1i} &= \ddot{\beta}_i \cdot \sin \beta_i \sin \gamma_i - \ddot{\gamma}_i \cos \beta_i \cos \gamma_i + \dot{\beta}_i^2 \cos \beta_i \sin \gamma_i + \dot{\beta}_i \dot{\gamma}_i \sin \beta_i \cos \gamma_i - \\ & - \dot{\gamma}_i \cdot (-\dot{\beta}_i \sin \beta_i \cos \gamma_i - \dot{\gamma}_i \cos \beta_i \sin \gamma_i) = \\ & = \ddot{\beta}_i \cdot \gamma_{1i} \sin \gamma_i - \ddot{\gamma}_i \alpha_{1i} + 2\dot{\beta}_i \dot{\gamma}_i \gamma_{1i} \cos \gamma_i - (\dot{\beta}_i^2 + \dot{\gamma}_i^2) \beta_{1i} \end{aligned}$$



4. A GYORSULÁSOK KÉNYSZEREGYENLETEI

$$\begin{aligned}
 \ddot{\gamma}_{1i} &= \ddot{\beta}_i \cdot \cos \beta_i - \dot{\beta}_i^2 \cdot \sin \beta_i \\
 \ddot{\alpha}_{2i} &= -\ddot{\alpha}_i \cdot \alpha_{3i} + \ddot{\beta}_i \cdot \alpha_{1i} \sin \alpha_i + \ddot{\gamma}_i \cdot \beta_{2i} - \dot{\alpha}_i \cdot \dot{\alpha}_{3i} + \dot{\beta}_i \cdot \dot{\alpha}_{1i} \sin \alpha_i + \\
 &\quad + \dot{\alpha}_i \cdot \dot{\beta}_i \cdot \alpha_{1i} \cos \alpha_i + \dot{\gamma}_i \cdot \dot{\beta}_{2i} \\
 \ddot{\beta}_{2i} &= -\ddot{\alpha}_i \cdot \beta_{3i} + \ddot{\beta}_i \cdot \beta_{1i} \sin \alpha_i - \ddot{\gamma}_i \cdot \alpha_{2i} - \dot{\alpha}_i \cdot \dot{\beta}_{3i} - \dot{\gamma}_i \dot{\alpha}_{2i} + \dot{\beta}_i \cdot \dot{\beta}_{1i} \sin \alpha_i + \\
 &\quad + \dot{\alpha}_i \cdot \dot{\beta}_i \cdot \beta_{1i} \cos \alpha_i \\
 \ddot{\gamma}_{2i} &= -\ddot{\alpha}_i \cdot \gamma_{3i} + \ddot{\beta}_i \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \alpha_i - \dot{\alpha}_i \cdot \dot{\gamma}_{3i} + \dot{\beta}_i \cdot \dot{\gamma}_{1i} \sin \alpha_i + \dot{\alpha}_i \dot{\beta}_i \gamma_{1i} \cos \alpha_i = \\
 &= -\ddot{\alpha}_i \cdot \gamma_{3i} + \ddot{\beta}_i \cdot \gamma_{1i} \sin \alpha_i + 2\dot{\alpha}_i \dot{\beta}_i \gamma_{1i} \cos \alpha_i - (\dot{\alpha}_i^2 + \dot{\beta}_i^2) \cdot \gamma_{2i} \\
 \ddot{\alpha}_{3i} &= \ddot{\alpha}_i \cdot \alpha_{2i} + \ddot{\gamma}_i \cdot \beta_{3i} - \ddot{\beta}_i \cdot \alpha_{1i} \cos \alpha_i + \dot{\alpha}_i \cdot \dot{\alpha}_{2i} + \dot{\gamma}_i \cdot \dot{\beta}_{3i} - \dot{\beta}_i \cdot \dot{\alpha}_{1i} \cos \alpha_i + \\
 &\quad + \dot{\beta}_i \cdot \dot{\alpha}_i \cdot \alpha_{1i} \sin \alpha_i \\
 \ddot{\beta}_{3i} &= \ddot{\alpha}_i \cdot \beta_{2i} - \ddot{\gamma}_i \cdot \alpha_{3i} - \ddot{\beta}_i \cdot \beta_{1i} \cos \alpha_i + \dot{\alpha}_i \cdot \dot{\beta}_{2i} - \dot{\gamma}_i \cdot \dot{\alpha}_{3i} - \dot{\beta}_i \cdot \dot{\beta}_{1i} \cos \alpha_i + \\
 &\quad + \dot{\alpha}_i \cdot \dot{\beta}_i \cdot \beta_{1i} \sin \alpha_i \\
 \ddot{\gamma}_{3i} &= \ddot{\alpha}_i \cdot \gamma_{2i} - \ddot{\beta}_i \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \alpha_i + \dot{\alpha}_i \cdot \dot{\gamma}_{2i} - \dot{\beta}_i \cdot \dot{\gamma}_{1i} \cdot \cos \alpha_i + \dot{\alpha}_i \cdot \dot{\beta}_i \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \alpha_i
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

A segédrendszerek iránytényezői parciális deriváltjainak idő szerinti deriváltjai kizárólag az előző fejezetekben meghatározott, tehát ismert tagokat tartalmaznak.

A segédrendszerek iránytényezőinek idő szerinti másodrendű deriváltjait a (3.3) parciális deriváltak alapján, szintén deriválással írjuk fel:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} \right) &= \frac{d}{dt} [-\gamma_{1i} \cdot \alpha_{1i}^0 \cdot \cos \gamma_i + \gamma_{1i} \cdot \alpha_{2i}^0 \cdot \sin \gamma_i + \alpha_{3i}^0 \cdot \cos \beta_i] = \\
 &= \left[ -\dot{\gamma}_{1i} \cdot \alpha_{1i}^0 \cdot \cos \gamma_i + \dot{\gamma}_i \cdot \gamma_{1i} \cdot \alpha_{1i}^0 \cdot \sin \gamma_i + \dot{\gamma}_{1i} \cdot \alpha_{2i}^0 \cdot \sin \gamma_i + \right. \\
 &\quad \left. + \dot{\gamma}_i \cdot \gamma_{1i} \cdot \alpha_{2i}^0 \cdot \cos \gamma_i - \dot{\beta}_i \cdot \alpha_{3i}^0 \cdot \sin \beta_i \right] \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} \right) = \frac{d}{dt} [\beta_{1i} \cdot \alpha_{1i}^0 - \alpha_{1i} \cdot \alpha_{2i}^0] = [\dot{\beta}_{1i} \cdot \alpha_{1i}^0 - \dot{\alpha}_{1i} \cdot \alpha_{2i}^0] \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21i}}{\partial \alpha_i} \right) &= \frac{d}{dt} [-(\alpha_{3i} \cdot \alpha_{1i}^0 + \beta_{3i} \cdot \alpha_{2i}^0 + \gamma_{3i} \cdot \alpha_{3i}^0)] = \\
 &= -[\dot{\alpha}_{3i} \cdot \alpha_{1i}^0 + \dot{\beta}_{3i} \cdot \alpha_{2i}^0 + \dot{\gamma}_{3i} \cdot \alpha_{3i}^0] \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21i}}{\partial \beta_i} \right) &= \frac{d}{dt} [(\alpha_{1i} \cdot \alpha_{1i}^0 + \beta_{1i} \cdot \alpha_{2i}^0 + \gamma_{1i} \cdot \alpha_{3i}^0) \cdot \sin \alpha_i] = \\
 &= \left[ (\dot{\alpha}_{1i} \cdot \alpha_{1i}^0 + \dot{\beta}_{1i} \cdot \alpha_{2i}^0 + \dot{\gamma}_{1i} \cdot \alpha_{3i}^0) \cdot \sin \alpha_i + \right. \\
 &\quad \left. + \dot{\alpha}_i \cdot (\alpha_{1i} \cdot \alpha_{1i}^0 + \beta_{1i} \cdot \alpha_{2i}^0 + \gamma_{1i} \cdot \alpha_{3i}^0) \cdot \cos \alpha_i \right] \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21i}}{\partial \gamma_i} \right) = \frac{d}{dt} [\beta_{2i} \cdot \alpha_{1i}^0 - \alpha_{2i} \cdot \alpha_{2i}^0] = [\dot{\beta}_{2i} \cdot \alpha_{1i}^0 - \dot{\alpha}_{2i} \cdot \alpha_{2i}^0] \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} \right) &= \frac{d}{dt} [\alpha_{2i} \cdot \alpha_{1i}^0 + \beta_{2i} \cdot \alpha_{2i}^0 + \gamma_{2i} \cdot \alpha_{3i}^0] = \\ &= [\dot{\alpha}_{2i} \cdot \alpha_{1i}^0 + \dot{\beta}_{2i} \cdot \alpha_{2i}^0 + \dot{\gamma}_{2i} \cdot \alpha_{3i}^0] \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} \right) &= \frac{d}{dt} [-(\alpha_{1i} \cdot \alpha_{1i}^0 + \beta_{1i} \cdot \alpha_{2i}^0 + \gamma_{1i} \cdot \alpha_{3i}^0) \cdot \cos \alpha_i] = \\ &= \left[ -(\dot{\alpha}_{1i} \cdot \alpha_{1i}^0 + \dot{\beta}_{1i} \cdot \alpha_{2i}^0 + \dot{\gamma}_{1i} \cdot \alpha_{3i}^0) \cdot \cos \alpha_i + \right. \\ &\quad \left. + \dot{\alpha}_i \cdot (\alpha_{1i} \cdot \alpha_{1i}^0 + \beta_{1i} \cdot \alpha_{2i}^0 + \gamma_{1i} \cdot \alpha_{3i}^0) \cdot \sin \alpha_i \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} \right) = \frac{d}{dt} [\beta_{3i} \cdot \alpha_{1i}^0 - \alpha_{3i} \cdot \alpha_{2i}^0] = [\dot{\beta}_{3i} \cdot \alpha_{1i}^0 - \dot{\alpha}_{3i} \cdot \alpha_{2i}^0] \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} \right) &= \frac{d}{dt} [-\gamma_{1i} \cdot \beta_{1i}^0 \cdot \cos \gamma_i + \gamma_{1i} \cdot \beta_{2i}^0 \cdot \sin \gamma_i + \beta_{3i}^0 \cdot \cos \beta_i] = \\ &= \left[ -\dot{\gamma}_{1i} \cdot \beta_{1i}^0 \cdot \cos \gamma_i + \dot{\gamma}_i \cdot \gamma_{1i} \cdot \beta_{1i}^0 \cdot \sin \gamma_i + \dot{\gamma}_{1i} \cdot \beta_{2i}^0 \cdot \sin \gamma_i + \right. \\ &\quad \left. + \dot{\gamma}_i \cdot \gamma_{1i} \cdot \beta_{2i}^0 \cdot \cos \gamma_i - \dot{\beta}_i \cdot \beta_{3i}^0 \cdot \sin \beta_i \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} \right) = \frac{d}{dt} [\beta_{1i} \cdot \beta_{1i}^0 - \alpha_{1i} \cdot \beta_{2i}^0] = [\dot{\beta}_{1i} \cdot \beta_{1i}^0 - \dot{\alpha}_{1i} \cdot \beta_{2i}^0] \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{22i}}{\partial \alpha_i} \right) &= \frac{d}{dt} [-(\alpha_{3i} \cdot \beta_{1i}^0 + \beta_{3i} \cdot \beta_{2i}^0 + \gamma_{3i} \cdot \beta_{3i}^0)] = \\ &= [-(\dot{\alpha}_{3i} \cdot \beta_{1i}^0 + \dot{\beta}_{3i} \cdot \beta_{2i}^0 + \dot{\gamma}_{3i} \cdot \beta_{3i}^0)] \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{22i}}{\partial \beta_i} \right) &= \frac{d}{dt} [(\alpha_{1i} \cdot \beta_{1i}^0 + \beta_{1i} \cdot \beta_{2i}^0 + \gamma_{1i} \cdot \beta_{3i}^0) \cdot \sin \alpha_i] = \\ &= \left[ (\dot{\alpha}_{1i} \cdot \beta_{1i}^0 + \dot{\beta}_{1i} \cdot \beta_{2i}^0 + \dot{\gamma}_{1i} \cdot \beta_{3i}^0) \cdot \sin \alpha_i + \right. \\ &\quad \left. + \dot{\alpha}_i \cdot (\alpha_{1i} \cdot \beta_{1i}^0 + \beta_{1i} \cdot \beta_{2i}^0 + \gamma_{1i} \cdot \beta_{3i}^0) \cdot \cos \alpha_i \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{22i}}{\partial \gamma_i} \right) = \frac{d}{dt} [\beta_{2i} \cdot \beta_{1i}^0 - \alpha_{2i} \cdot \beta_{2i}^0] = [\dot{\beta}_{2i} \cdot \beta_{1i}^0 - \dot{\alpha}_{2i} \cdot \beta_{2i}^0] \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} \right) &= \frac{d}{dt} [\alpha_{2i} \cdot \beta_{1i}^0 + \beta_{2i} \cdot \beta_{2i}^0 + \gamma_{2i} \cdot \beta_{3i}^0] = \\ &= [\dot{\alpha}_{2i} \cdot \beta_{1i}^0 + \dot{\beta}_{2i} \cdot \beta_{2i}^0 + \dot{\gamma}_{2i} \cdot \beta_{3i}^0] \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} \right) &= \frac{d}{dt} [-(\alpha_{1i} \cdot \beta_{1i}^0 + \beta_{1i} \cdot \beta_{2i}^0 + \gamma_{1i} \cdot \beta_{3i}^0) \cdot \cos \alpha_i] = \\ &= \left[ -(\dot{\alpha}_{1i} \cdot \beta_{1i}^0 + \dot{\beta}_{1i} \cdot \beta_{2i}^0 + \dot{\gamma}_{1i} \cdot \beta_{3i}^0) \cdot \cos \alpha_i + \right. \\ &\quad \left. + \dot{\alpha}_i \cdot (\alpha_{1i} \cdot \beta_{1i}^0 + \beta_{1i} \cdot \beta_{2i}^0 + \gamma_{1i} \cdot \beta_{3i}^0) \cdot \sin \alpha_i \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} \right) = \frac{d}{dt} [\beta_{3i} \cdot \beta_{1i}^0 - \alpha_{3i} \cdot \beta_{2i}^0] = [\dot{\beta}_{3i} \cdot \beta_{1i}^0 - \dot{\alpha}_{3i} \cdot \beta_{2i}^0] \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \beta_i} \right) &= \frac{d}{dt} [-\gamma_{1i} \cdot \gamma_{1i}^0 \cdot \cos \gamma_i + \gamma_{1i} \cdot \gamma_{2i}^0 \cdot \sin \gamma_i + \gamma_{3i}^0 \cdot \cos \beta_i] = \\ &= \left[ -\dot{\gamma}_{1i} \cdot \gamma_{1i}^0 \cdot \cos \gamma_i + \dot{\gamma}_i \cdot \gamma_{1i} \cdot \gamma_{1i}^0 \cdot \sin \gamma_i + \dot{\gamma}_{1i} \cdot \gamma_{2i}^0 \cdot \sin \gamma_i + \right. \\ &\quad \left. + \dot{\gamma}_i \cdot \gamma_{1i} \cdot \gamma_{2i}^0 \cdot \cos \gamma_i - \dot{\beta}_i \cdot \gamma_{3i}^0 \cdot \sin \beta_i \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

4. A GYORSULÁSOK KÉNYSZEREGYENLETEI

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \gamma_i} \right) = \frac{d}{dt} [\beta_{1i} \cdot \gamma_{1i}^0 - \alpha_{1i} \cdot \gamma_{2i}^0] = [\dot{\beta}_{1i} \cdot \gamma_{1i}^0 - \dot{\alpha}_{1i} \cdot \gamma_{2i}^0] \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \alpha_i} \right) &= \frac{d}{dt} [-(\alpha_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{3i} \cdot \gamma_{3i}^0)] = \\ &= [-(\dot{\alpha}_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \dot{\beta}_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \dot{\gamma}_{3i} \cdot \gamma_{3i}^0)] \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \beta_i} \right) &= \frac{d}{dt} [(\alpha_{1i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{1i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{1i} \cdot \gamma_{3i}^0) \cdot \sin \alpha_i] = \\ &= \left[ (\dot{\alpha}_{1i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \dot{\beta}_{1i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \dot{\gamma}_{1i} \cdot \gamma_{3i}^0) \cdot \sin \alpha_i + \right. \\ &\quad \left. + \dot{\alpha}_i \cdot (\alpha_{1i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{1i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{1i} \cdot \gamma_{3i}^0) \cdot \cos \alpha_i \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \gamma_i} \right) = \frac{d}{dt} [\beta_{2i} \cdot \gamma_{1i}^0 - \alpha_{2i} \cdot \gamma_{2i}^0] = [\dot{\beta}_{2i} \cdot \gamma_{1i}^0 - \dot{\alpha}_{2i} \cdot \gamma_{2i}^0] \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \alpha_i} \right) &= \frac{d}{dt} [\alpha_{2i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{2i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{2i} \cdot \gamma_{3i}^0] = \\ &= [\dot{\alpha}_{2i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \dot{\beta}_{2i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \dot{\gamma}_{2i} \cdot \gamma_{3i}^0] \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \beta_i} \right) &= \frac{d}{dt} [-(\alpha_{1i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{1i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{1i} \cdot \gamma_{3i}^0) \cdot \cos \alpha_i] = \\ &= \left[ -(\dot{\alpha}_{1i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \dot{\beta}_{1i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \dot{\gamma}_{1i} \cdot \gamma_{3i}^0) \cdot \cos \alpha_i + \right. \\ &\quad \left. + \dot{\alpha}_i \cdot (\alpha_{1i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{1i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{1i} \cdot \gamma_{3i}^0) \cdot \sin \alpha_i \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \gamma_i} \right) = \frac{d}{dt} [\beta_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 - \alpha_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0] = [\dot{\beta}_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 - \dot{\alpha}_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0] \quad (4.26)$$

A (3.6) egyenlőségek deriváltjai pedig a következők:

$$\frac{d}{dt} (\dot{b}_{11i}) = \ddot{b}_{11i} = \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} + \ddot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} \right) + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} \right) \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\dot{b}_{21i}) &= \ddot{b}_{21i} = \ddot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \alpha_i} + \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \beta_i} + \ddot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\alpha}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21i}}{\partial \alpha_i} \right) + \\ &\quad + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21i}}{\partial \beta_i} \right) + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21i}}{\partial \gamma_i} \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\dot{b}_{31i}) &= \ddot{b}_{31i} = \ddot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} + \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} + \ddot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\alpha}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} \right) + \\ &\quad + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} \right) + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\frac{d}{dt} (\dot{b}_{12i}) = \ddot{b}_{12i} = \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} + \ddot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} \right) + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} \right) \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\dot{b}_{22i}) &= \ddot{b}_{22i} = \ddot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \alpha_i} + \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \beta_i} + \ddot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\alpha}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{22i}}{\partial \alpha_i} \right) + \\ &\quad + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{22i}}{\partial \beta_i} \right) + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{22i}}{\partial \gamma_i} \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{b}_{32i}) = \ddot{b}_{32i} = & \ddot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} + \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} + \ddot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\alpha}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} \right) + \\ & + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} \right) + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} \right) \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{b}_{13i}) = \ddot{b}_{13i} = \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \beta_i} + \ddot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \beta_i} \right) + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \gamma_i} \right) \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{b}_{23i}) = \ddot{b}_{23i} = & \ddot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \alpha_i} + \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \beta_i} + \ddot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\alpha}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \alpha_i} \right) + \\ & + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \beta_i} \right) + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \gamma_i} \right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{b}_{33i}) = \ddot{b}_{33i} = & \ddot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \alpha_i} + \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \beta_i} + \ddot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\alpha}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \alpha_i} \right) + \\ & + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \beta_i} \right) + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \gamma_i} \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Figyelembe véve a (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) és a (3.8) egyenleteket, a (3.57) mátrixegyenletből, ennek az esetnek megfelelően felírható a gyorsulások első három kényszeregyenletének általános alakja:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{Gi} + \ddot{\beta}_i \cdot \left( -x_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i + y_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \cos \beta_i + a \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} \right) + \\ + \ddot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} \right) + \ddot{a} \cdot b_{11i} + \\ + \dot{\beta}_i \cdot \left[ \begin{array}{l} -x_{ij} \cdot (\dot{\beta}_i \cdot \alpha_{1i} - \dot{\gamma}_i \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i) - y_{ij} \cdot (\dot{\beta}_i \cdot \beta_{1i} - \dot{\gamma}_i \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i) - \\ - z_{ij} \cdot \dot{\beta}_i \sin \beta_i + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} \right) \end{array} \right] + \\ + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i} + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} \right) \right) + \\ + 2 \cdot \dot{a} \cdot \dot{b}_{11i} - \ddot{X}_{Gj} - \ddot{\beta}_j \cdot (-x_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j + z_{ji} \cdot \cos \beta_j) - \\ - \ddot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j}) - \\ - \dot{\beta}_j \cdot \left[ \begin{array}{l} -x_{ji} \cdot (\dot{\beta}_j \cdot \alpha_{1j} - \dot{\gamma}_j \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j) - \\ - y_{ji} \cdot (\dot{\beta}_j \cdot \beta_{1j} - \dot{\gamma}_j \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j) - z_{ji} \cdot \dot{\beta}_j \sin \beta_j \end{array} \right] - \\ - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j}) = 0 \\ \ddot{Y}_{Gi} + \ddot{a} \cdot b_{21i} - \ddot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i} - a \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \alpha_i}) + \\ + 2 \cdot \dot{a} \cdot \dot{b}_{21i} - \dot{\alpha}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i} - a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21i}}{\partial \alpha_i} \right) \right) + \\ + \ddot{\beta}_i \cdot \left[ (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \sin \alpha_i + a \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \beta_i} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\dot{\beta}_i \cdot \left[ (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{1i}) \cdot \sin \alpha_i + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21i}}{\partial \beta_i} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \dot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \cos \alpha_i \right] + \\
& +\dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \gamma_i}) + \\
& +\dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{2i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{2i} + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21i}}{\partial \gamma_i} \right) \right) - \\
& -\ddot{Y}_{Gj} + \ddot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) + \\
& +\ddot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j}) - \\
& -\ddot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \\
& -\dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \\
& -\dot{\beta}_j \cdot \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \cos \alpha_j - \\
& -\dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j}) - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{2j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{2j}) = 0 \\
\\
& \ddot{Z}_{Gi} + \ddot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i}) + \\
& +\ddot{\alpha}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{2i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{2i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{2i} + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} \right) \right) - \\
& -\ddot{\beta}_i \cdot \left( (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \cos \alpha_i - a \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} \right) - \\
& -\dot{\beta}_i \cdot \left[ \begin{aligned} & (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{1i}) \cdot \cos \alpha_i - \\ & -\dot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \sin \alpha_i - a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} \right) \end{aligned} \right] + \\
& +\ddot{a} \cdot b_{31i} + 2 \cdot \dot{a} \cdot \dot{b}_{31i} + \ddot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i} + a \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i}) + \\
& +\dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i} + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} \right) \right) - \ddot{Z}_{Gj} - \\
& -\ddot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j}) - \\
& -\ddot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{2j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{2j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{2j}) + \\
& +\ddot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \cos \alpha_j + \\
& +\dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{1j}) \cdot \cos \alpha_j - \\
& -\dot{\beta}_j \cdot \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \\
& -\dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j}) - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j}) = 0 \tag{4.36}
\end{aligned}$$

A továbbiakban is csak az alsó osztályú csuklók sajátos gyorsuláseloszlásait vizsgáljuk.

#### 4.1.1. A henger alakú csukló

A henger alakú csukló gyorsulásainak első három kényszer egyenletét a (4.36) egyenletrendszer adja. Az egytengelyűség (4.37) feltételei pedig a (3.8) egyenletrendszer két utolsó egyenletének deriváltjaival van kifejezve, a (4.27) és a (4.29) egyenlőségek szerint, a (4.38) rendszerben.

$$\begin{aligned}\ddot{b}_{11i} - \ddot{b}_{11j} &= 0 \\ \ddot{b}_{31i} - \ddot{b}_{31j} &= 0\end{aligned}\tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} + \ddot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} \right) + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} \right) - \\ - \left( \ddot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \beta_j} + \ddot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \gamma_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11j}}{\partial \beta_j} \right) + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11j}}{\partial \gamma_j} \right) \right) &= 0 \\ \ddot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} + \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} + \ddot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\alpha}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} \right) + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} \right) + \\ + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} \right) - \left[ \ddot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \alpha_j} + \ddot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \beta_j} + \ddot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \gamma_j} + \dot{\alpha}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31j}}{\partial \alpha_j} \right) + \right. \\ \left. + \dot{\beta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31j}}{\partial \beta_j} \right) + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31j}}{\partial \gamma_j} \right) \right] &= 0\end{aligned}\tag{4.38}$$

#### 4.1.2. A forgó csukló

A forgó csuklóval kapcsolt kinematikai pár gyorsulásainak kényszer egyenleteit a (4.36) egyenletek sajátos alakjából és a (4.38) feltételekből állítjuk fel. A forgó csukló feltételeinek megfelelően az „a” paraméter állandó, tehát az  $\dot{a} = \ddot{a} = 0$ , amely szerint a (4.36) egyenletrendszer a következőképpen módosul:

$$\begin{aligned}\ddot{X}_{Gi} + \ddot{\beta}_i \cdot \left( -x_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i + y_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \cos \beta_i + a \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} \right) + \\ + \ddot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} \right) + \\ + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i} + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} \right) \right) + \\ + \dot{\beta}_i \cdot \left[ \begin{array}{l} -x_{ij} \cdot (\dot{\beta}_i \cdot \alpha_{1i} - \dot{\gamma}_i \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i) - \\ -y_{ij} \cdot (\dot{\beta}_i \cdot \beta_{1i} - \dot{\gamma}_i \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i) - \\ -z_{ij} \cdot \dot{\beta}_i \sin \beta_i + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} \right) \end{array} \right] - \\ - \ddot{X}_{Gj} - \ddot{\beta}_j \cdot \left( -x_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j + z_{ji} \cdot \cos \beta_j \right) - \\ - \ddot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j} \right) -\end{aligned}$$

$$-\dot{\beta}_j \cdot \left[ \begin{array}{c} -x_{ji} \cdot (\dot{\beta}_j \cdot \alpha_{1j} - \dot{\gamma}_j \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j) - \\ -y_{ji} \cdot (\dot{\beta}_j \cdot \beta_{1j} - \dot{\gamma}_j \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j) - z_{ji} \cdot \dot{\beta}_j \sin \beta_j \end{array} \right] - \\ -\dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j}) = 0$$

$$\ddot{Y}_{Gi} - \ddot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i} - a \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \alpha_i}) - \\ -\ddot{\alpha}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i} - a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21i}}{\partial \alpha_i} \right) \right) + \\ + \ddot{\beta}_i \cdot \left( (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \sin \alpha_i + a \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \beta_i} \right) + \\ + \dot{\beta}_i \cdot \left[ \begin{array}{c} (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{1i}) \cdot \sin \alpha_i + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21i}}{\partial \beta_i} \right) + \\ + \ddot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \cos \alpha_i \end{array} \right] + \\ + \ddot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \gamma_i}) + \\ + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{2i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{2i} + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21i}}{\partial \gamma_i} \right) \right) - \\ - \ddot{Y}_{Gj} + \ddot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) + \\ + \ddot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j}) - \\ - \ddot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \\ - \dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \\ - \dot{\beta}_j \cdot \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \cos \alpha_j - \\ - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j}) - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{2j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{2j}) = 0$$

$$\ddot{Z}_{Gi} + \ddot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i}) + \\ + \ddot{\alpha}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{2i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{2i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{2i} + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} \right) \right) - \\ - \ddot{\beta}_i \cdot \left( (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \cos \alpha_i - a \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} \right) - \\ - \dot{\beta}_i \cdot \left[ \begin{array}{c} (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{1i}) \cdot \cos \alpha_i - \\ - \ddot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \sin \alpha_i - a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} \right) \end{array} \right] + \\ + \ddot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i} + a \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i}) + \\ + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i} + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} \right) \right) - \\ - \ddot{Z}_{Gj} - \ddot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j}) - \\ - \ddot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{2j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{2j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{2j}) + \\ + \ddot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \cos \alpha_j + \\ + \dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{1j}) \cdot \cos \alpha_j -$$

$$\begin{aligned}
 & -\dot{\beta}_j \cdot \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \\
 & -\ddot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j}) - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j}) = 0 \\
 & \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} \right) + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} \right) - \\
 & - \left[ \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \beta_{ji}} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \gamma_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11j}}{\partial \beta_j} \right) + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11j}}{\partial \gamma_{ji}} \right) \right] = 0 \\
 & \ddot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} + \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\alpha}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} \right) + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} \right) + \\
 & + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} \right) - \\
 & - \left[ \ddot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \alpha_j} + \ddot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \gamma_j} + \dot{\alpha}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31j}}{\partial \alpha_j} \right) + \right. \\
 & \left. \dot{\beta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31j}}{\partial \beta_j} \right) + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31j}}{\partial \gamma_j} \right) \right] = 0 \tag{4.39}
 \end{aligned}$$

#### 4.1.3. A csúszka (keresztfej)

A csúszka gyorsulásainak első három kényszer egyenletét, akár csak a hengeres csukló esetében, az általános alakban írt (4.36) rendszer adja.

A (4.36) egyenletrendszerhez még hozzá kell rendelni azokat a feltételeket, amelyek kizárják az összes relatív szöggyorsulásokat a két tag között, mint például:

$$\begin{aligned}
 \ddot{b}_{11i} - \ddot{b}_{11j} &= 0 \\
 \ddot{b}_{31i} - \ddot{b}_{31j} &= 0 \\
 \ddot{b}_{33i} - \ddot{b}_{33j} &= 0 \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

A (4.40) feltétel harmadik egyenlete általában már a pozíciók meghatározása után kiesik, mert nagyon ritka az a mechanizmus, amelynek csúszkával kapcsolt tagjai közül valamelyik tag egyszerre két tengely körül fordul el.

A (4.40) egyenletrendszer kifejtett alakja a következő:

$$\begin{aligned}
 & \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} \right) + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} \right) - \\
 & - \left[ \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \beta_{ji}} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \gamma_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11j}}{\partial \beta_j} \right) + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11j}}{\partial \gamma_{ji}} \right) \right] = 0
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \ddot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} + \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\alpha}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} \right) + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} \right) + \\
 & + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} \right) - \left[ \begin{aligned} & \ddot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \alpha_j} + \ddot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \gamma_j} + \dot{\alpha}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31j}}{\partial \alpha_j} \right) + \\ & + \dot{\beta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31j}}{\partial \beta_j} \right) + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31j}}{\partial \gamma_j} \right) \end{aligned} \right] = 0 \\
 & \ddot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \alpha_i} + \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \beta_i} + \dot{\alpha}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \alpha_i} \right) + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \beta_i} \right) - \\
 & - \left( \ddot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \alpha_j} + \ddot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \beta_j} + \dot{\alpha}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33j}}{\partial \alpha_j} \right) + \dot{\beta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33j}}{\partial \beta_j} \right) \right) = 0 \quad (4.41)
 \end{aligned}$$

#### 4.1.4. A gömbcsukló

A gömbcsuklóhoz tartozó gyorsulásokat meghatározó kényszer egyenletek a (4.36) általános alakú egyenletrendszer sajátosításával fejezzük ki. Vegyük észre, hogy az „a” paraméter és deriváltjainak értékei zérus értékűek, így nem szerepelnek az alábbi egyenletrendszerben:

$$\begin{aligned}
 & \ddot{X}_{Gi} + \dot{\beta}_i \cdot (-x_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i + y_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \cos \beta_i) + \\
 & + \dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i}) + \dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i}) + \\
 & + \dot{\beta}_i \cdot \left[ \begin{aligned} & -x_{ij} \cdot (\dot{\beta}_i \cdot \alpha_{1i} - \dot{\gamma}_i \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i) - \\ & y_{ij} \cdot (\dot{\beta}_i \cdot \beta_{1i} - \dot{\gamma}_i \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i) - z_{ij} \cdot \dot{\beta}_i \sin \beta_i \end{aligned} \right] - \ddot{X}_{Gj} - \\
 & - \ddot{\beta}_j \cdot (-x_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j + z_{ji} \cdot \cos \beta_j) - \\
 & - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j}) - \\
 & - \dot{\beta}_j \cdot \left[ \begin{aligned} & -x_{ji} \cdot (\dot{\beta}_j \cdot \alpha_{1j} - \dot{\gamma}_j \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j) - \\ & -y_{ji} \cdot (\dot{\beta}_j \cdot \beta_{1j} - \dot{\gamma}_j \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j) - z_{ji} \cdot \dot{\beta}_j \sin \beta_j \end{aligned} \right] - \\
 & - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j}) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \ddot{Y}_{Gi} - \ddot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) - \dot{\alpha}_i \cdot [x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i}] + \\
 & + \dot{\beta}_i \cdot [(x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \sin \alpha_i] + \\
 & + \dot{\beta}_i \cdot \left[ \begin{aligned} & (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{1i}) \cdot \sin \alpha_i + \\ & + \dot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \cos \alpha_i \end{aligned} \right] + \\
 & + \dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i}) + \dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{2i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{2i}) - \ddot{Y}_{Gj} + \\
 & + \ddot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) + \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j}) - \\
 & - \ddot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \\
 & - \dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \\
 & - \dot{\beta}_j \cdot \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \cos \alpha_j - \\
 & - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j}) - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{2j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{2j}) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{Z}_{Gi} + \ddot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i}) + \dot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{2i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{2i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{2i}) - \\
& - \dot{\beta}_i \cdot \left( (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \cos \alpha_i \right) - \\
& - \dot{\beta}_i \cdot \left[ (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{1i}) \cdot \cos \alpha_i - \right. \\
& \left. - \dot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \sin \alpha_i \right] + \\
& + \ddot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i}) + \dot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i}) - \ddot{Z}_{Gj} - \\
& - \ddot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j}) - \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{2j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{2j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{2j}) + \\
& + \ddot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \cos \alpha_j + \\
& + \dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{1j}) \cdot \cos \alpha_j - \\
& - \dot{\beta}_j \cdot \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \\
& - \ddot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j}) - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j}) = 0
\end{aligned} \tag{4.42}$$

#### 4.1.5. Az egytetemes csukló

Az egytetemes csukló gyorsulásainak kényszeregyenleteit úgy kapjuk, hogy a gömbcsukló (4.42) rendszerét az alábbi feltétellel egészítjük ki:

$$\begin{aligned}
& \ddot{b}_{11i} \cdot b_{12j} + 2\dot{b}_{11i} \cdot \dot{b}_{12j} + b_{11i} \cdot \ddot{b}_{12j} + \ddot{b}_{21i} \cdot b_{22j} + 2\dot{b}_{21i} \cdot \dot{b}_{22j} + \\
& + b_{21i} \cdot \ddot{b}_{22j} + \ddot{b}_{31i} \cdot b_{32j} + 2\dot{b}_{31i} \cdot \dot{b}_{32j} + b_{31i} \cdot \ddot{b}_{32j} = 0
\end{aligned} \tag{4.43}$$

E feltétel általános alakja a (3.14) feltétel deriváltja, azaz a számítások részletezésével:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\alpha}_i \cdot \left( \frac{\partial b_{11i}}{\partial \alpha_i} b_{12j} + \frac{\partial b_{21i}}{\partial \alpha_i} b_{22j} + \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} b_{32j} \right) + \\
& + \left[ \dot{\alpha}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11i}}{\partial \alpha_i} \right) + \dot{\beta}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} \right) + \dot{\gamma}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} \right) \right] \cdot b_{12j} + \\
& + \dot{\beta}_i \cdot \left( \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} b_{12j} + \frac{\partial b_{21i}}{\partial \beta_i} b_{22j} + \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} b_{32j} \right) + \\
& + \left[ \dot{\alpha}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21i}}{\partial \alpha_i} \right) + \dot{\beta}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21i}}{\partial \beta_i} \right) + \dot{\gamma}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21i}}{\partial \gamma_i} \right) \right] \cdot b_{22j} + \\
& + \dot{\gamma}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} b_{12j} + \frac{\partial b_{21i}}{\partial \gamma_i} b_{22j} + \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} b_{32j} \right] + \\
& + \left[ \dot{\alpha}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} \right) + \dot{\beta}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} \right) + \dot{\gamma}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} \right) \right] \cdot b_{32j} + \\
& + \ddot{\alpha}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{12j}}{\partial \alpha_j} b_{11i} + \frac{\partial b_{22j}}{\partial \alpha_j} b_{21i} + \frac{\partial b_{32j}}{\partial \alpha_j} b_{31i} \right] + \\
& + \left[ \dot{\alpha}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12j}}{\partial \alpha_j} \right) + \dot{\beta}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12j}}{\partial \beta_j} \right) + \dot{\gamma}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12j}}{\partial \gamma_j} \right) \right] \cdot b_{11i} + \\
& + \dot{\beta}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{12j}}{\partial \beta_j} b_{11i} + \frac{\partial b_{22j}}{\partial \beta_j} b_{21i} + \frac{\partial b_{32j}}{\partial \beta_j} b_{31i} \right] + \\
& + \left[ \dot{\alpha}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{22j}}{\partial \alpha_j} \right) + \dot{\beta}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{22j}}{\partial \beta_j} \right) + \dot{\gamma}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{22j}}{\partial \gamma_j} \right) \right] \cdot b_{21i} + \\
& + \dot{\gamma}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{12j}}{\partial \gamma_j} b_{11i} + \frac{\partial b_{22j}}{\partial \gamma_j} b_{21i} + \frac{\partial b_{32j}}{\partial \gamma_j} b_{31i} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ \dot{\alpha}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32j}}{\partial \alpha_j} \right) + \dot{\beta}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32j}}{\partial \beta_j} \right) + \dot{\gamma}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32j}}{\partial \gamma_j} \right) \right] \cdot b_{31i} + \\
 & + 2 \cdot \left[ \dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{11i}}{\partial \gamma_i} \right] \cdot \left[ \dot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{12j}}{\partial \alpha_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{12j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{12j}}{\partial \gamma_j} \right] + \\
 & + 2 \cdot \left[ \dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{21i}}{\partial \gamma_i} \right] \cdot \left[ \dot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{22j}}{\partial \alpha_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{22j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{22j}}{\partial \gamma_j} \right] + \\
 & + 2 \cdot \left[ \dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \gamma_i} \right] \cdot \left[ \dot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \alpha_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \gamma_j} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

#### 4.1.6. A menetes csukló

A menetes csuklóhoz tartozó gyorsulások meghatározására a (2.16) kényszer-egyenleteket és a hengeres csukló feltételeit használjuk. Ezekhez a feltételekhez hozzárendeljük a (3.16) és a (3.17) egyenletek deriváltjait, amelyek rendre:

$$\ddot{\varphi}_\alpha = \ddot{\alpha}_i^* - \ddot{\alpha}_j^* \tag{4.45}$$

illetve

$$\ddot{a} = \frac{p}{2\pi} \cdot (\ddot{\alpha}_i^* - \ddot{\alpha}_j^*) \tag{4.46}$$

Az „i” és „j” tagokhoz tartozó segédrendszerek az  $O_{ij}^* x_i^*$  és  $O_{ji}^* x_j^*$  egybeeső tengelyek körül  $\ddot{\alpha}_i^*$  és  $\ddot{\alpha}_j^*$  szöggyorsulással fordulnak el. Ezek a szöggyorsulások a (3.18) és a (3.19) egyenletek deriváltjai, részletezve az alábbiak:

$$\ddot{\alpha}_i^* = - \left( \frac{(\ddot{b}_{23i} \cdot b_{33i} - b_{23i} \cdot \ddot{b}_{33i}) \cdot (b_{23i}^2 + b_{33i}^2) - 2 \cdot (\dot{b}_{23i} \cdot b_{33i} - b_{23i} \cdot \dot{b}_{33i}) \cdot (b_{23i} \cdot \dot{b}_{23i} - b_{33i} \cdot \dot{b}_{33i})}{(b_{23i}^2 + b_{33i}^2)^2} \right) \tag{4.47}$$

$$\ddot{\alpha}_j^* = - \left( \frac{(\ddot{b}_{23j} \cdot b_{33j} - b_{23j} \cdot \ddot{b}_{33j}) \cdot (b_{23j}^2 + b_{33j}^2) - 2 \cdot (\dot{b}_{23j} \cdot b_{33j} - b_{23j} \cdot \dot{b}_{33j}) \cdot (b_{23j} \cdot \dot{b}_{23j} - b_{33j} \cdot \dot{b}_{33j})}{(b_{23j}^2 + b_{33j}^2)^2} \right) \tag{4.48}$$

Ha a (3.3) és a (3.4) egyenleteket behelyettesítjük a (4.46) egyenletbe, a menetes csukló harmadik feltételét kapjuk:

$$\ddot{a} + \frac{p}{2\pi} \cdot \left[ \frac{(\ddot{b}_{23i} \cdot b_{33i} - b_{23i} \cdot \ddot{b}_{33i}) \cdot (b_{23i}^2 + b_{33i}^2) - 2 \cdot (\dot{b}_{23i} \cdot b_{33i} - b_{23i} \cdot \dot{b}_{33i}) \cdot (b_{23i} \cdot \dot{b}_{23i} - b_{33i} \cdot \dot{b}_{33i})}{(b_{23i}^2 + b_{33i}^2)^2} - \frac{(\ddot{b}_{23j} \cdot b_{33j} - b_{23j} \cdot \ddot{b}_{33j}) \cdot (b_{23j}^2 + b_{33j}^2) - 2 \cdot (\dot{b}_{23j} \cdot b_{33j} - b_{23j} \cdot \dot{b}_{33j}) \cdot (b_{23j} \cdot \dot{b}_{23j} - b_{33j} \cdot \dot{b}_{33j})}{(b_{23j}^2 + b_{33j}^2)^2} \right] = 0 \tag{4.49}$$

#### 4.2. A gyorsulások kényszer egyenletei az $O_{ij}^*y_i^*$ és az $O_{ji}^*y_j^*$ tengelyek egybeesésékor

A (3.22) egyenlet idő szerinti deriválása után felírható az  $O_{ij}^*y_i^*$  és  $O_{ji}^*y_j^*$  egybeesésének megfelelő gyorsulások mátrixegyenlete.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_{1i} & \ddot{\beta}_{1i} & \ddot{\gamma}_{1i} & \ddot{X}_{Gi} \\ \ddot{\alpha}_{2i} & \ddot{\beta}_{2i} & \ddot{\gamma}_{2i} & \ddot{Y}_{Gi} \\ \ddot{\alpha}_{3i} & \ddot{\beta}_{3i} & \ddot{\gamma}_{3i} & \ddot{Z}_{Gi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \\ 1 \end{bmatrix} + \ddot{a} \cdot \begin{bmatrix} b_{12i} \\ b_{22i} \\ b_{32i} \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \dot{a} \cdot \begin{bmatrix} \dot{b}_{12i} \\ \dot{b}_{22i} \\ \dot{b}_{32i} \\ 0 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} \ddot{b}_{12i} \\ \ddot{b}_{22i} \\ \ddot{b}_{32i} \\ 0 \end{bmatrix} - \\ & - \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_{1j} & \ddot{\beta}_{1j} & \ddot{\gamma}_{1j} & \ddot{X}_{Gj} \\ \ddot{\alpha}_{2j} & \ddot{\beta}_{2j} & \ddot{\gamma}_{2j} & \ddot{Y}_{Gj} \\ \ddot{\alpha}_{3j} & \ddot{\beta}_{3j} & \ddot{\gamma}_{3j} & \ddot{Z}_{Gj} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{ji} \\ y_{ji} \\ z_{ji} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

A (4.50) mátrixegyenletből a (4.36) rendszerhez hasonló, de az  $O_{ij}^*y_i^* \equiv O_{ji}^*y_j^*$  tengelyeknek megfelelő kényszer egyenletekhez jutunk, amelyek a következők:

$$\begin{aligned} & \ddot{X}_{Gi} + \ddot{\beta}_i \cdot \left( -x_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i + y_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \cos \beta_i + a \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} \right) + \\ & + \ddot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} \right) + \ddot{a} \cdot b_{12i} + \\ & + \ddot{\beta}_i \cdot \left[ -x_{ij} \cdot (\dot{\beta}_i \cdot \alpha_{1i} - \dot{\gamma}_i \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i) - \right. \\ & \left. - y_{ij} \cdot (\dot{\beta}_i \cdot \beta_{1i} - \dot{\gamma}_i \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i) - z_{ij} \cdot \dot{\beta}_i \sin \beta_i \right] + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} \right) \Bigg] + \\ & + \ddot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i} + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} \right) \right) + 2 \cdot \dot{a} \cdot \dot{b}_{12i} - \ddot{X}_{Gj} - \\ & - \ddot{\beta}_j \cdot \left( -x_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j + z_{ji} \cdot \cos \beta_j \right) - \\ & - \ddot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j} \right) - \\ & - \ddot{\beta}_j \cdot \left[ -x_{ji} \cdot (\dot{\beta}_j \cdot \alpha_{1j} - \dot{\gamma}_j \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j) - \right. \\ & \left. - y_{ji} \cdot (\dot{\beta}_j \cdot \beta_{1j} - \dot{\gamma}_j \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j) - z_{ji} \cdot \dot{\beta}_j \sin \beta_j \right] - \\ & - \ddot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j} \right) = 0 \\ & \ddot{Y}_{Gi} + \ddot{a} \cdot b_{22i} - \ddot{\alpha}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i} - a \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \alpha_i} \right) + 2 \cdot \dot{a} \cdot \dot{b}_{22i} - \\ & - \ddot{\alpha}_i \cdot \left[ x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i} - a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{22i}}{\partial \alpha_i} \right) \right] + \\ & + \ddot{\beta}_i \cdot \left[ \left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} \right) \cdot \sin \alpha_i + a \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \beta_i} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\dot{\beta}_i \cdot \left[ (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{1i}) \cdot \sin \alpha_i + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{22i}}{\partial \beta_i} \right) + \right. \\
& \left. + \dot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \cos \alpha_i \right. \\
& + \ddot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \gamma_i}) + \\
& + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{2i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{2i} + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{22i}}{\partial \gamma_i} \right) \right) - \ddot{Y}_{Gj} + \\
& + \ddot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) + \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j}) - \\
& - \ddot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \\
& - \dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \\
& - \dot{\beta}_j \cdot \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \cos \alpha_j - \\
& - \ddot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j}) - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{2j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{2j}) = 0 \\
\ddot{Z}_{Gi} + \ddot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i}) + \\
& + \dot{\alpha}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{2i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{2i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{2i} + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} \right) \right) - \\
& - \ddot{\beta}_i \cdot \left( (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \cos \alpha_i - a \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} \right) - \\
& - \dot{\beta}_i \cdot \left( (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{1i}) \cdot \cos \alpha_i - \right. \\
& \left. - \dot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \sin \alpha_i - a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} \right) \right) + \\
& + \ddot{a} \cdot b_{32i} + 2 \cdot \dot{a} \cdot \dot{b}_{32i} + \ddot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i} + a \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i}) + \\
& + \dot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i} + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} \right) \right) - \ddot{Z}_{Gj} - \\
& - \ddot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j}) - \\
& - \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{2j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{2j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{2j}) + \\
& + \ddot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \cos \alpha_j + \\
& + \dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{1j}) \cdot \cos \alpha_j - \\
& - \dot{\beta}_j \cdot \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \\
& - \ddot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j}) - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j}) = 0 \tag{4.51}
\end{aligned}$$

#### 4.2.1. A henger alakú csukló

A henger alakú csukló gyorsulásainak első három kényszer egyenlete megegyezik az általános alakban írt (3.7) rendszerrel. Az  $O_{ij}^* y_i^* \equiv O_{ji}^* y_j^*$  tengelyekre vonat-

kozó egytengelyűség feltételeit a (3.23) és a (3.24) egyenletek deriváltjai adják, azaz:

$$\begin{aligned} \ddot{b}_{12i} &= \ddot{b}_{12j} \\ \ddot{b}_{32i} &= \ddot{b}_{32j} \end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} \right) + \ddot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} \right) - \\ &\quad - \left[ \ddot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{12j}}{\partial \beta_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12j}}{\partial \beta_j} \right) + \ddot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{12j}}{\partial \gamma_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12j}}{\partial \gamma_j} \right) \right] = 0 \\ &\ddot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\alpha}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} \right) + \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} \right) + \\ &\quad + \ddot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} \right) - \\ &\quad - \left[ \ddot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \alpha_j} + \dot{\alpha}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32j}}{\partial \alpha_j} \right) + \ddot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \beta_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32j}}{\partial \beta_j} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \ddot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \gamma_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32j}}{\partial \gamma_j} \right) \right] = 0 \end{aligned} \tag{4.53}$$

A (4.51) egyenletek a (4.53) feltételekkel együtt, az  $O_{ij}^* y_i^* \equiv O_{ji}^* y_j^* \equiv O_{ij}^* y_i^* \equiv O_{ji}^* y_j^*$  tengelyen kapcsolódó henger alakú csuklóhoz tartozó gyorsulások kényszer-egyenleteit alkotják.

#### 4.2.2. A forgó csukló

A forgó csuklóval kapcsolt,  $O_{ij}^* y_i^* \equiv O_{ji}^* y_j^*$  tengelyeknek megfelelő kinematikai pár gyorsulásait meghatározó kényszer-egyenleteket a (3.25) rendszer idő szerinti deriválásával kapjuk. Itt is érvényesek a (4.51)  $\dot{\alpha} = \dot{\alpha} = 0$  sajátos esetek és a (4.53) feltételek, amelyekből felírható:

$$\begin{aligned} &\ddot{X}_{Gi} + \ddot{\beta}_i \cdot \left( -x_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i + y_{ij} \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i + z_{ij} \cdot \cos \beta_i + a \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} \right) \\ &\quad + \ddot{\gamma}_i \cdot \left( x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} \right) + \\ &\quad + \dot{\gamma}_i \cdot \left[ x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i} + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} \right) \right] + \\ &\quad + \dot{\beta}_i \cdot \left[ -x_{ij} \cdot (\dot{\beta}_i \cdot \alpha_{1i} - \dot{\gamma}_i \cdot \gamma_{1i} \cdot \sin \gamma_i) - y_{ij} \cdot (\dot{\beta}_i \cdot \beta_{1i} - \dot{\gamma}_i \cdot \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_i) - \right. \\ &\quad \left. - z_{ij} \cdot \dot{\beta}_i \sin \beta_i + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} \right) \right] - \\ &\quad - \ddot{X}_{Gj} - \ddot{\beta}_j \cdot \left( -x_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j + y_{ji} \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j + z_{ji} \cdot \cos \beta_j \right) - \\ &\quad - \ddot{\gamma}_j \cdot \left( x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j} \right) - \end{aligned}$$

$$-\dot{\beta}_j \cdot \left[ -x_{ji} \cdot (\dot{\beta}_j \cdot \alpha_{1j} - \dot{\gamma}_j \cdot \gamma_{1j} \cdot \sin \gamma_j) - \right. \\ \left. -y_{ji} \cdot (\dot{\beta}_j \cdot \beta_{1j} - \dot{\gamma}_j \cdot \gamma_{1j} \cdot \cos \gamma_j) - z_{ji} \cdot \dot{\beta}_j \sin \beta_j \right] - \\ -\dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j}) = 0$$

$$\ddot{Y}_{Gi} - \ddot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i} - a \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \alpha_i}) - \\ -\ddot{\alpha}_i \cdot \left[ x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i} - a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{22i}}{\partial \alpha_i} \right) \right] + \\ + \ddot{\beta}_i \cdot \left[ (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \sin \alpha_i + a \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \beta_i} \right] + \\ + \ddot{\beta}_i \cdot \left[ (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{1i}) \cdot \sin \alpha_i + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{22i}}{\partial \beta_i} \right) \right] + \\ + \ddot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \gamma_i}) + \\ + \ddot{\gamma}_i \cdot \left[ x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{2i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{2i} + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{22i}}{\partial \gamma_i} \right) \right] - \ddot{Y}_{Gj} + \\ + \ddot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) + \ddot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j}) - \\ - \ddot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \\ - \dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \\ - \dot{\beta}_j \cdot \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \cos \alpha_j - \\ - \ddot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j}) - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{2j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{2j}) = 0$$

$$\ddot{Z}_{Gi} + \ddot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i}) + \\ + \ddot{\alpha}_i \cdot \left[ x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{2i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{2i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{2i} + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} \right) \right] - \\ - \ddot{\beta}_i \cdot \left[ (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \cos \alpha_i - a \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} \right] - \\ - \dot{\beta}_i \cdot \left[ (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{1i}) \cdot \cos \alpha_i - \right. \\ \left. - \ddot{\alpha}_i \cdot (x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) \cdot \sin \alpha_i - a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} \right) \right] + \\ + \ddot{\gamma}_i \cdot (x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i} + a \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i}) + \\ + \ddot{\gamma}_i \cdot \left[ x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i} + a \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} \right) \right] - \ddot{Z}_{Gj} - \\ - \ddot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j}) - \ddot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{2j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{2j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{2j}) + \\ + \ddot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \cos \alpha_j + \\ + \dot{\beta}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{1j}) \cdot \cos \alpha_j - \\ - \dot{\beta}_j \cdot \dot{\alpha}_j \cdot (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) \cdot \sin \alpha_j - \\ - \ddot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j}) - \dot{\gamma}_j \cdot (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j}) = 0$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} \right) + \ddot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} \right) - \\
& \quad - \left[ \ddot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{12j}}{\partial \beta_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12j}}{\partial \beta_j} \right) + \ddot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{12j}}{\partial \gamma_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12j}}{\partial \gamma_j} \right) \right] = 0 \\
& \ddot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\alpha}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} \right) + \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} \right) + \ddot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} \right) - \\
& \quad - \left[ \ddot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \alpha_j} + \dot{\alpha}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32j}}{\partial \alpha_j} \right) + \ddot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \beta_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32j}}{\partial \beta_j} \right) + \right. \\
& \quad \quad \left. + \ddot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \gamma_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32j}}{\partial \gamma_j} \right) \right] = 0 \quad (4.54)
\end{aligned}$$

### 4.2.3. A csúszka (keresztfej)

Az  $O_{ij}^* y_i^* \equiv O_{ji}^* y_j^*$  tengelyen elmozduló csúszka gyorsulásait meghatározó első három egyenlet megegyezik a (4.51) kényszer egyenlet-rendszerben található első három egyenlettel. A (4.51) rendszerhez hozzárendeljük a (4.53) egytengelyűségi feltételt, valamint a (4.55) tengely körüli elfordulás feltételét, hogy kizárjuk ezáltal a két tag közötti relatív elfordulást. Ez a (4.33) feltétellel is kifejezhető:

$$\ddot{b}_{13i} - \ddot{b}_{13j} = 0 \quad (4.55)$$

Az  $O_{ij}^* y_i^* \equiv O_{ji}^* y_j^*$  tengelyen mozgó csúszka gyorsulásait meghatározó egyenlet-rendszerbe beépítendő feltételek a következők:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} \right) + \ddot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} \right) - \\
& \quad - \left[ \ddot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{12j}}{\partial \beta_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12j}}{\partial \beta_j} \right) + \ddot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{12j}}{\partial \gamma_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12j}}{\partial \gamma_j} \right) \right] = 0 \\
& \ddot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\alpha}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} \right) + \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} \right) + \ddot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} \right) - \\
& \quad - \left[ \ddot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \alpha_j} + \dot{\alpha}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32j}}{\partial \alpha_j} \right) + \ddot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \beta_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32j}}{\partial \beta_j} \right) + \right. \\
& \quad \quad \left. + \ddot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{32j}}{\partial \gamma_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32j}}{\partial \gamma_j} \right) \right] = 0 \\
& \ddot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \beta_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \beta_i} \right) + \ddot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \gamma_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \gamma_i} \right) - \\
& \quad - \left[ \ddot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \beta_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13j}}{\partial \beta_j} \right) + \ddot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \gamma_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13j}}{\partial \gamma_j} \right) \right] = 0 \quad (4.56)
\end{aligned}$$

### 4.2.4. A gömbcsukló

A gömbcsukló gyorsulásainak kényszer egyenleteit a (4.42) egyenletrendszer adja.



### 4.2.5. Az egyetemes csukló

Az egyetemes csukló gyorsulásai kényszeregyenleteinek első három egyenletét ebben az esetben a (4.42) egyenletrendszerből vesszük. Az egyetemes csuklóra jellemző sajátos feltétel pedig a (3.28) egyenlet idő szerinti deriválásával határozható meg, azaz:

$$\ddot{b}_{12i} \cdot b_{13j} + 2\dot{b}_{12i} \cdot \dot{b}_{13j} + b_{12i} \cdot \ddot{b}_{13j} + \ddot{b}_{22i} \cdot b_{23j} + 2\dot{b}_{22i} \cdot \dot{b}_{23j} + b_{22i} \cdot \ddot{b}_{23j} + \ddot{b}_{32i} \cdot b_{33j} + 2\dot{b}_{32i} \cdot \dot{b}_{33j} + b_{32i} \cdot \ddot{b}_{33j} = 0 \quad (4.57)$$

A kérdéses feltétel általános alakját pedig a (3.29) összefüggés deriválásával kapjuk:

$$\begin{aligned} & \ddot{\alpha}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{12i}}{\partial \alpha_i} b_{13j} + \frac{\partial b_{22i}}{\partial \alpha_i} b_{23j} + \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} b_{33j} \right] + \\ & + \left[ \dot{\alpha}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12i}}{\partial \alpha_i} \right) + \dot{\beta}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} \right) + \dot{\gamma}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} \right) \right] \cdot b_{13j} + \\ & + \ddot{\beta}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} b_{13j} + \frac{\partial b_{22i}}{\partial \beta_i} b_{23j} + \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} b_{33j} \right] + \\ & + \left[ \dot{\alpha}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{22i}}{\partial \alpha_i} \right) + \dot{\beta}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{22i}}{\partial \beta_i} \right) + \dot{\gamma}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{22i}}{\partial \gamma_i} \right) \right] \cdot b_{23j} + \\ & + \ddot{\gamma}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} b_{13j} + \frac{\partial b_{22i}}{\partial \gamma_i} b_{23j} + \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} b_{33j} \right] + \\ & + \left[ \dot{\alpha}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} \right) + \dot{\beta}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} \right) + \dot{\gamma}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} \right) \right] \cdot b_{33j} + \\ & + \ddot{\alpha}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{13j}}{\partial \alpha_j} b_{12i} + \frac{\partial b_{23j}}{\partial \alpha_j} b_{22i} + \frac{\partial b_{33j}}{\partial \alpha_j} b_{32i} \right] + \\ & + \left[ \dot{\alpha}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13j}}{\partial \alpha_j} \right) + \dot{\beta}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13j}}{\partial \beta_j} \right) + \dot{\gamma}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13j}}{\partial \gamma_j} \right) \right] \cdot b_{12i} + \\ & + \ddot{\beta}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{13j}}{\partial \beta_j} b_{12i} + \frac{\partial b_{23j}}{\partial \beta_j} b_{22i} + \frac{\partial b_{33j}}{\partial \beta_j} b_{32i} \right] + \\ & + \left[ \dot{\alpha}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23j}}{\partial \alpha_j} \right) + \dot{\beta}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23j}}{\partial \beta_j} \right) + \dot{\gamma}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23j}}{\partial \gamma_j} \right) \right] \cdot b_{22i} + \\ & + \ddot{\gamma}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{13j}}{\partial \gamma_j} b_{12i} + \frac{\partial b_{23j}}{\partial \gamma_j} b_{22i} + \frac{\partial b_{33j}}{\partial \gamma_j} b_{32i} \right] + \\ & + \left[ \dot{\alpha}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33j}}{\partial \alpha_j} \right) + \dot{\beta}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33j}}{\partial \beta_j} \right) + \dot{\gamma}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33j}}{\partial \gamma_j} \right) \right] \cdot b_{32i} + \\ & + 2 \cdot \left[ \dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{12i}}{\partial \gamma_i} \right] \cdot \left[ \dot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \alpha_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \gamma_j} \right] + \\ & + 2 \cdot \left[ \dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{22i}}{\partial \gamma_i} \right] \cdot \left[ \dot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{23j}}{\partial \alpha_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{23j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{23j}}{\partial \gamma_j} \right] + \\ & + 2 \cdot \left[ \dot{\alpha}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \alpha_i} + \dot{\beta}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \beta_i} + \dot{\gamma}_i \cdot \frac{\partial b_{32i}}{\partial \gamma_i} \right] \cdot \left[ \dot{\alpha}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \alpha_j} + \dot{\beta}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \beta_j} + \dot{\gamma}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \gamma_j} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

### 4.2.6. A menetes csukló

A menetes csukló  $O_{ij}^*y_i^*$  és  $O_{ji}^*y_j^*$  egybeeső tengelyek körül elforduló „i” és „j” tagok gyorsulásainak meghatározására a hengeres csukló kényszer egyenleteit használjuk. A (4.51) egyenletek és a (4.53) feltételek mellé rendeljük a (3.31) és a (3.32) egyenletek idő szerinti deriváltjaiból kapott feltételeket, azaz:

$$\ddot{\varphi}_\beta = \ddot{\beta}_i^* - \ddot{\beta}_j^* \tag{4.59}$$

$$\ddot{a} = \frac{p}{2\pi} \cdot (\ddot{\beta}_i^* - \ddot{\beta}_j^*) \tag{4.60}$$

A (3.31) és a (3.32) egyenlőségek deriváltjai pedig az alábbiak lesznek

$$\frac{d\dot{\beta}_i^*}{dt} = \ddot{\beta}_i^* = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{b}_{13i}}{\sqrt{1-b_{13i}^2}} \right) = \frac{\ddot{b}_{13i} \cdot \sqrt{1-b_{13i}^2} + \dot{b}_{13i}^2 \cdot b_{13i} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-b_{13i}^2}}}{1-b_{13i}^2} \tag{4.61}$$

$$\frac{d\dot{\beta}_j^*}{dt} = \ddot{\beta}_j^* = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{b}_{13j}}{\sqrt{1-b_{13j}^2}} \right) = \frac{\ddot{b}_{13j} \cdot \sqrt{1-b_{13j}^2} + \dot{b}_{13j}^2 \cdot b_{13j} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-b_{13j}^2}}}{1-b_{13j}^2} \tag{4.62}$$

Ezekkel a (4.60) egyenlet a következő alakban írható:

$$\ddot{a} = \frac{p}{2\pi} \cdot \left( \frac{\ddot{b}_{13i} \cdot \sqrt{1-b_{13i}^2} + \dot{b}_{13i}^2 \cdot b_{13i} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-b_{13i}^2}}}{1-b_{13i}^2} - \frac{\ddot{b}_{13j} \cdot \sqrt{1-b_{13j}^2} + \dot{b}_{13j}^2 \cdot b_{13j} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-b_{13j}^2}}}{1-b_{13j}^2} \right) \tag{4.63}$$

Figyelembe véve a (4.33) egyenlőséget, felírható a (4.63) egyenlet kifejtett alakja:

$$\ddot{a} - \frac{p}{2\pi} \cdot \left( \frac{\ddot{\beta}_i \frac{\partial b_{13i}}{\partial \beta_i} \cdot \sqrt{1-b_{13i}^2} + \dot{\gamma}_i \frac{\partial b_{13i}}{\partial \gamma_i} \cdot \sqrt{1-b_{13i}^2} + \left[ \dot{\beta}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \beta_i} \right) + \dot{\gamma}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \gamma_i} \right) \right] \cdot \sqrt{1-b_{13i}^2}}{1-b_{13i}^2} - \frac{\ddot{\beta}_j \frac{\partial b_{13j}}{\partial \beta_j} \cdot \sqrt{1-b_{13j}^2} + \dot{\gamma}_j \frac{\partial b_{13j}}{\partial \gamma_j} \cdot \sqrt{1-b_{13j}^2} + \left[ \dot{\beta}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13j}}{\partial \beta_j} \right) + \dot{\gamma}_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13j}}{\partial \gamma_j} \right) \right] \cdot \sqrt{1-b_{13j}^2}}{1-b_{13j}^2} + \frac{\dot{b}_{13i}^2 \cdot b_{13i} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-b_{13i}^2}}}{1-b_{13i}^2} - \frac{\dot{b}_{13j}^2 \cdot b_{13j} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-b_{13j}^2}}}{1-b_{13j}^2} \right) = 0 \tag{4.64}$$

Az  $O_{ij}^*y_i^* \equiv O_{ji}^*y_j^*$  tengelyek körül elmozduló „i” és „j” tagok gyorsulásainak kényszer egyenleteit a (4.64), (4.51) és a (4.53) egyenletrendszerekből alkotjuk:

*Megjegyzés:*

A mechanizmusok pozícióit, sebességeit és gyorsulásait meghatározó kényszeregyenletek általános alakban vannak felírva.

A gyakorlati alkalmazásokban a fenti kényszeregyenletek sokkal egyszerűbb, az egyes sajátos eseteknek megfelelő alakra hozhatók. Ha síkban fekvő mechanizmusról van szó, akkor a síkra merőleges tengelyek egytengelyűségre vonatkozó feltételei hiányozhatnak, a kényszeregyenleteknek a száma hárommal csökkenhet, mivel a tagoknak csak két lineáris és egy szögsebesség-változója van.

Ha a síkban kapcsolódó, hengeres, forgó vagy menetes csukló szimmetriatengelye csak önmagával párhuzamosan mozdul el, akkor a segédrendszer iránytényezői változatlanok, ezek deriváltjai nullák, a csuklókhoz tartozó kényszeregyenletek száma pedig hárommal csökken.

A tagok sebességét, gyorsulását meghatározó kényszeregyenletekből alkotott egyenletrendszer mindig elsőfokú egyenletekből tevődik össze.

A sebességek és a gyorsulások kényszeregyenleteinek száma mindig egyenlő az ismeretlenek számával.

## 5. KINEMATIKAI PÁROK EULER-SZÖGEKKEL KIFEJEZETT KÉNYSZEREGYENLETEI

### 5.1. Alapelvek

Akár az előbbi fejezetekben bemutatott matematikai modellek esetében, kiindulópontként a mozgó tag kiválasztott pontjának helyzetét kell felírni egy helytálló OXYZ koordináta-rendszerhez. E célból, jelen esetben, a mozgó tag tömegközéppontjának  $X_{Gi}, Y_{Gi}, Z_{Gi}$  koordinátáit, a tehetetlenségi főirányokra épített koordináta-rendszernek az álló rendszerhez definiált Euler-szögeit, valamint a kiválasztott pont saját koordinátáit használjuk fel. Ez utóbbit a konstrukciós megfontolások miatt célszerű a segédrendszerben kifejezni, majd a tehetetlenségi főirányok rendszerébe átírni.

Az Euler-szögekkel kifejezett kényszer egyenletek ugyanazon elv alapján vannak felírva, mind a háromtengelyes forgatás esetén. A különbség abban áll, hogy jelen esetben a kényszer egyenleteket csak a két forgástengelyre lehet felírni.

A mechanizmusok kinematikai vizsgálata áttekinthetőbbé válik, ha a vezető tag forgástengelye, illetve a kiegyensúlyozó tengely egybeesik az Euler-szög alapú transzformáció első forgástengelyével.

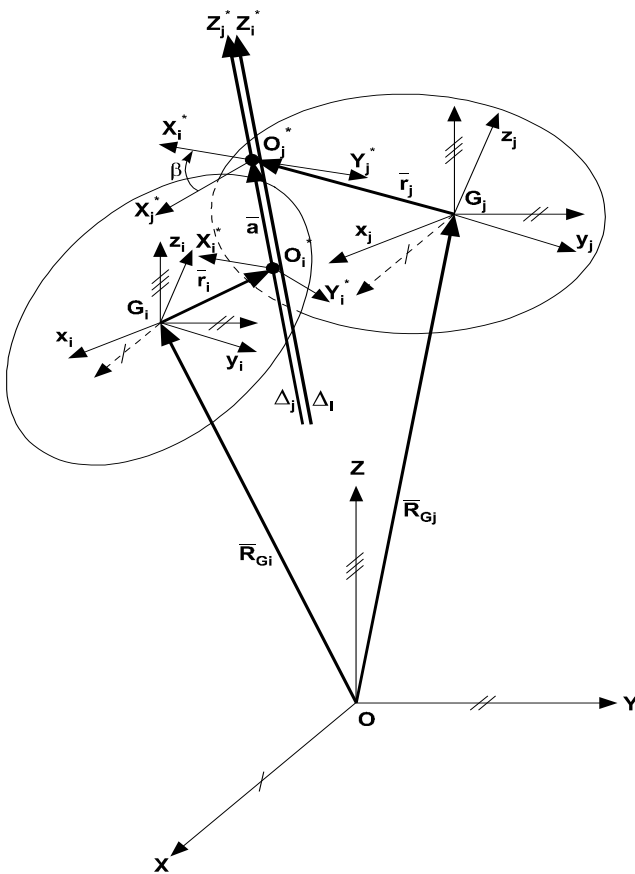
Legyen „*i*” és „*j*” egy térbeli mechanizmus alsó osztályú csuklóval kapcsolt (hengeres, forgó, csúszka, csavar, gömbcsukló vagy csapos gömbcsukló) két tagja, mint ahogy azt az 5.1. ábrán szemléltettük.

Amint a 2. fejezetben található 2.1. táblázatban rendszereztek, a kinematikai párok vagy egy szignifikáns közös tengellyel (1, 2, 3, 4), vagy pedig egy szignifikáns közös ponttal (5, 6) rendelkeznek.

Az 5.1-es ábrán az „*i*” és „*j*” tagok a fent bemutatott kinematikai párok egyikével vannak kapcsolva. A felírás általános, innen pedig sajátosítással levezethetők az alsó osztályú kinematikai párok összes eseteihez tartozó egyenletrendszerek.

A két kapcsolódó taghoz tartozó, a központi tehetetlenségi fő tengelyekre épített rendszer helyzetét egy rögzített OXYZ rendszerhez hat általános koordinátával adjuk meg: ezek az  $\mathbf{R}_{Gi}(X_{Gi}, Y_{Gi}, Z_{Gi})$  és  $\mathbf{R}_{Gj}(X_{Gj}, Y_{Gj}, Z_{Gj})$  a két test súlypontjának koordinátái, és a  $\psi_i, \theta_i, \phi_i$ , illetve a  $\psi_j, \theta_j, \phi_j$  Euler-szögek. Az „*i*” taghoz tartozó  $O_{ij}^*$  pont helyzetét az  $\mathbf{r}_{ij}(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$  helyvektor adja meg a  $G_i x_i y_i z_i$  fő

tehetetlenségi irányok rendszeréhez viszonyítva. Hasonlóképpen a „j” testhez tartozó  $O_{ji}^*$  pontot az  $\mathbf{r}_{ji}(x_{ji}, y_{ji}, z_{ji})$  helyvektorral adjuk meg a  $G_j x_j y_j z_j$  rendszerhez képest. Ezek a helyvektorok a mechanizmus külön álló tagjaihoz tartozó állandók, nem hatnak egyik testről a másikra, csak meghatározzák egyenként az „i” és „j” taghoz rögzített  $O_{ij}^* x_i^* y_i^* z_i^*$  és  $O_{ji}^* x_j^* y_j^* z_j^*$  segédrendszereket. Ezek Euler-szögei az OXYZ rendszerhez viszonyítva  $\psi_i^*, \theta_i^*, \varphi_i^*$ , illetve  $\psi_j^*, \theta_j^*, \varphi_j^*$ . Az említett segédrendszerek úgy voltak meghatározva, hogy a hengeres, csúszó, forgó vagy menetes csukló  $O_{ij}^* z_i^*$  és  $O_{ji}^* z_j^*$  funkcionális (forgás-, illetve csavar) tengelyei egybeessenek, mint ahogyan azt az 5.1. ábrán a  $\Delta_i \equiv \Delta_j$  tengelyre illesztve láthatjuk. Az „i” és „j” tagok, bármely karos mechanizmus esetében, a segédrendszereken keresztül vannak összekapcsolva.



5.1. ábra

A közös  $\Delta_i \equiv \Delta_j$  tengelyre illeszkednek a segédrendszerek  $O_{ij}^*$  és  $O_{ji}^*$  origói, a köztük levő távolságvektor pedig, akár az előbbi fejezetekben,  $\mathbf{a}$ . A hengeres, csúszó és menetes csuklók esetén, a tengely menti elcsúszás fennállása miatt  $\mathbf{a}$  vektor moduluszában változó, a forgó csukló esetén, nem lévén relatív elcsúszás,  $\mathbf{a}$  vektor moduluszában állandó.

A fentebb említettek alapján következik, hogy ezekben az esetekben a segédrendszerek között, a csukló által bevitt és típusa által meghatározott kényszerfeltételeknek megfelelően, fenn kell álljon a következő egyenlőségek közül egy, két vagy mindhárom összefüggés:

$$\begin{aligned} \psi_i^* &= \psi_j^* \\ \theta_i^* &= \theta_j^* \\ \varphi_i^* &= \varphi_j^* \end{aligned} \tag{5.1}$$

Az 5.1-es ábra szerint felírható a következő vektoriális egyenlet:

$$\mathbf{R}_{Gi} + \mathbf{r}_{ij} + \mathbf{a} - \mathbf{R}_{Gj} - \mathbf{r}_{ji} = 0 \tag{5.2}$$

A vektorsokszög tagjainak az OXYZ rögzített rendszerhez viszonyított összetevői a következő mátrixegyenletbe vonhatók össze:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos \alpha_{1i} & \cos \beta_{1i} & \cos \gamma_{1i} & X_{Gi} \\ \cos \alpha_{2i} & \cos \beta_{2i} & \cos \gamma_{2i} & Y_{Gi} \\ \cos \alpha_{3i} & \cos \beta_{3i} & \cos \gamma_{3i} & Z_{Gi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} b_{13i} \\ b_{23i} \\ b_{33i} \\ 0 \end{bmatrix} - \\ & - \begin{bmatrix} \cos \alpha_{1j} & \cos \beta_{1j} & \cos \gamma_{1j} & X_{Gj} \\ \cos \alpha_{2j} & \cos \beta_{2j} & \cos \gamma_{2j} & Y_{Gj} \\ \cos \alpha_{3j} & \cos \beta_{3j} & \cos \gamma_{3j} & Z_{Gj} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ji} \\ y_{ji} \\ z_{ji} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Az (5.3) egyenletben szereplő homogén transzformációs mátrixok a  $G_i x_i y_i z_i$  és  $G_j x_j y_j z_j$  tehetetlenségi főirányokra épülő rendszereket transzformálják az OXYZ rendszerbe. Ezek forgató almátrixait, az eddigiekhez hasonló módon, jelöljük  $\mathbf{T}_{1i}$ -vel és  $\mathbf{T}_{1j}$ -vel. A  $b_{13i}$ ,  $b_{23i}$ ,  $b_{33i}$  együtthatók pedig az  $O_{ij}^* z_i^*$  tengely iránytényezőit jelentik az OXYZ rendszerhez viszonyítva. A  $\mathbf{T}_{1i}^*$  forgató almátrix jelölései a következők:

$$\mathbf{T}_{1i^*} = \begin{bmatrix} b_{11i} & b_{12i} & b_{13i} \\ b_{21i} & b_{22i} & b_{23i} \\ b_{31i} & b_{32i} & b_{33i} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

ahonnan kifejezhetők a kérdéses iránytényezők:

$$\begin{bmatrix} b_{13i} \\ b_{23i} \\ b_{33i} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{1i^*} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

A következőkben a  $\mathbf{T}_{1i^*}$  forgató almátrix tagjait az Euler-szögekkel (1.43) fejezzük ki. A számítások elvégzése után a következő képletekhez jutunk:

$$\begin{aligned} b_{11i} &= \cos \psi_i^* \cos \varphi_i^* - \sin \psi_i^* \cos \theta_i^* \sin \varphi_i^* \\ b_{21i} &= \sin \psi_i^* \cos \varphi_i^* + \cos \psi_i^* \cos \theta_i^* \sin \varphi_i^* \\ b_{31i} &= \sin \theta_i^* \sin \varphi_i^* \\ b_{12i} &= -\cos \psi_i^* \sin \varphi_i^* - \sin \psi_i^* \cos \theta_i^* \cos \varphi_i^* \\ b_{22i} &= -\sin \psi_i^* \sin \varphi_i^* + \cos \psi_i^* \cos \theta_i^* \cos \varphi_i^* \\ b_{32i} &= \sin \theta_i^* \cos \varphi_i^* \\ b_{13i} &= \sin \psi_i^* \sin \theta_i^* \\ b_{23i} &= -\cos \psi_i^* \sin \theta_i^* \\ b_{33i} &= \cos \theta_i^* \end{aligned} \quad (5.6)$$

Hasonlóképpen, rendre azonosíthatók az (5.3) egyenlet forgatómátrixban tárolt iránytényezők, ha a  $\psi_i, \theta_i, \varphi_i$  szögeket az (1.43) egyenlőségekbe rendre behelyettesítjük:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{1i} &= \cos \psi_i \cos \varphi_i - \sin \psi_i \cos \theta_i \sin \varphi_i \\ \cos \beta_{1i} &= -\cos \psi_i \sin \varphi_i - \sin \psi_i \cos \theta_i \cos \varphi_i \\ \cos \gamma_{1i} &= \sin \psi_i \sin \theta_i \\ \cos \alpha_{2i} &= \sin \psi_i \cos \varphi_i + \cos \psi_i \cos \theta_i \sin \varphi_i \\ \cos \beta_{2i} &= -\sin \psi_i \sin \varphi_i + \cos \psi_i \cos \theta_i \cos \varphi_i \\ \cos \gamma_{2i} &= -\cos \psi_i \sin \theta_i \\ \cos \alpha_{3i} &= \sin \theta_i \sin \varphi_i \\ \cos \beta_{3i} &= \sin \theta_i \cos \varphi_i \\ \cos \gamma_{3i} &= \cos \theta_i \end{aligned} \quad (5.7)$$

A  $O_{ij}^* x_i^* y_i^* z_i^*$  segédrendszer forgatómátrixát a  $Gx_i y_i z_i$  tehetetlenségi főtegyenlekek koordináta-rendszeréhez viszonyítva  $\mathbf{T}_{ii^*}$ -al jelöljük:

$$\mathbf{T}_{ii^*} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{1i}^0 & \cos \beta_{1i}^0 & \cos \gamma_{1i}^0 \\ \cos \alpha_{2i}^0 & \cos \beta_{2i}^0 & \cos \gamma_{2i}^0 \\ \cos \alpha_{3i}^0 & \cos \beta_{3i}^0 & \cos \gamma_{3i}^0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Gyakorlatilag a  $\mathbf{T}_{ii^*}$  mátrixot ismertnek tekinthetjük, mert a mechanizmus tagja-  
inak rajzai AutoCAD-ben vagy más modellező környezetben vannak elkészítve,  
a környezet pedig képes a tömegközéppontot és a tehetetlenségi főtengelyek  
iránytényezőit meghatározni a szóban forgó tag segédrendszeréhez képest, ame-  
lyeket, értelmezés szerint, a  $\mathbf{T}_{i^*i}$  mátrixba tárolunk el. Vegyük észre, hogy

$$\mathbf{T}_{i^*i}^T = \mathbf{T}_{ii^*} \quad (5.9)$$

A segédrendszer  $O_{ij}^*z_i^*$  tengelyének iránytényezői a  $Gx_iy_iz_i$  tehetetlenségi fő-  
tengely koordináta-rendszeréhez viszonyítva a következők:

$$\begin{bmatrix} \cos \gamma_{1i}^0 \\ \cos \gamma_{2i}^0 \\ \cos \gamma_{3i}^0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{ii^*} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Ugyanazon egységvektor iránytényezői az OXYZ rögzített rendszerhez viszo-  
nyítva a következőképpen határozhatók meg:

$$\begin{bmatrix} b_{13i} \\ b_{23i} \\ b_{33i} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{1i} \cdot \mathbf{T}_{ii^*} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{1i} \cdot \begin{bmatrix} \cos \gamma_{1i}^0 \\ \cos \gamma_{2i}^0 \\ \cos \gamma_{3i}^0 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Behelyettesítve az (5.3) egyenletrendszerben szereplő  $\mathbf{T}_{1i}$  forgatómátrix tagjait  
az (5.11) mátrixegyenletbe, a műveletek elvégzése után a segédrendszer  $O_{ij}^*z_i^*$   
tengelyének iránytényezői a következők lesznek:

$$\begin{bmatrix} b_{13i} \\ b_{23i} \\ b_{33i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{1i} \cdot \cos \gamma_{1i}^0 + \cos \beta_{1i} \cdot \cos \gamma_{2i}^0 + \cos \gamma_{1i} \cdot \cos \gamma_{3i}^0 \\ \cos \alpha_{2i} \cdot \cos \gamma_{1i}^0 + \cos \beta_{2i} \cdot \cos \gamma_{2i}^0 + \cos \gamma_{2i} \cdot \cos \gamma_{3i}^0 \\ \cos \alpha_{3i} \cdot \cos \gamma_{1i}^0 + \cos \beta_{3i} \cdot \cos \gamma_{2i}^0 + \cos \gamma_{3i} \cdot \cos \gamma_{3i}^0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Az „i” taghoz csatolt segédrendszer  $O_{ij}^*x_i^*$  tengelyének az OXYZ rögzített rend-  
szer tengelyeivel alkotott iránytényezői meghatározásához a következő forgató-  
mátrixokat használjuk:

$$\begin{bmatrix} b_{11i} \\ b_{21i} \\ b_{31i} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{1i} \cdot \mathbf{T}_{ii^*} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$



ahonnan, a műveletek elvégzése után, következnek:

$$\begin{bmatrix} b_{11i} \\ b_{21i} \\ b_{31i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_{1i} \cdot \cos \alpha_{1i}^0 + \cos \beta_{1i} \cdot \cos \alpha_{2i}^0 + \cos \gamma_{1i} \cdot \cos \alpha_{3i}^0 \\ \cos \alpha_{2i} \cdot \cos \alpha_{1i}^0 + \cos \beta_{2i} \cdot \cos \alpha_{2i}^0 + \cos \gamma_{2i} \cdot \cos \alpha_{3i}^0 \\ \cos \alpha_{3i} \cdot \cos \alpha_{1i}^0 + \cos \beta_{3i} \cdot \cos \alpha_{2i}^0 + \cos \gamma_{3i} \cdot \cos \alpha_{3i}^0 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

A (5.3) mátrixegyenlet tagjainak az Euler-szögekkel való kifejezése céljából figyelembe vesszük az (5.7) összefüggéseket, amelyekkel felírhatóvá válik ennek a skaláris alakja:

$$\begin{aligned} & X_{Gi} + x_{ij} \cdot (\cos \varphi_i \cdot \cos \psi_i - \sin \varphi_i \cdot \sin \psi_i \cdot \cos \theta_i) - \\ & - y_{ij} \cdot (\sin \varphi_i \cdot \cos \psi_i + \cos \varphi_i \cdot \sin \psi_i \cdot \cos \theta_i) + z_{ij} \cdot \sin \theta_i \cdot \sin \psi_i + \\ & + a \cdot \left[ \begin{array}{l} (\cos \psi_i \cos \varphi_i - \sin \psi_i \cos \theta_i \sin \varphi_i) \cdot \cos \gamma_{1i}^0 + \\ + (-\cos \psi_i \sin \varphi_i - \sin \psi_i \cos \theta_i \cdot \cos \varphi_i) \cdot \cos \gamma_{2i}^0 + \\ + \sin \psi_i \sin \theta_i \cdot \cos \gamma_{3i}^0 \end{array} \right] - \\ & - X_{Gj} - x_{ji} \cdot (\cos \varphi_j \cdot \cos \psi_j - \sin \varphi_j \sin \psi_j \cdot \cos \theta_j) + \\ & + y_{ji} \cdot (\sin \varphi_j \cdot \cos \psi_j + \cos \varphi_j \cdot \sin \psi_j \cdot \cos \theta_j) - z_{ji} \cdot \sin \theta_j \cdot \sin \psi_j = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Y_{Gi} + x_{ij} \cdot (\cos \varphi_i \cdot \sin \psi_i + \cos \theta_i \cdot \sin \varphi_i \cdot \cos \psi_i) - \\ & - y_{ij} \cdot (\sin \varphi_i \cdot \sin \psi_i - \cos \psi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \cos \theta_i) - z_{ij} \cdot \sin \theta_i \cdot \cos \psi_i + \\ & + a \cdot \left[ \begin{array}{l} (\sin \psi_i \cos \varphi_i + \cos \psi_i \cos \theta_i \sin \varphi_i) \cdot \cos \gamma_{1i}^0 + \\ + (-\sin \psi_i \sin \varphi_i + \cos \psi_i \cos \theta_i \cos \varphi_i) \cdot \cos \gamma_{2i}^0 - \\ - \cos \psi_i \cos \theta \cos \gamma_{3i}^0 \end{array} \right] - \\ & - Y_{Gj} - x_{ji} \cdot (\cos \varphi_j \cdot \sin \psi_j + \cos \theta_j \cdot \sin \varphi_j \cdot \cos \psi_j) + \\ & + y_{ji} \cdot (\sin \varphi_j \cdot \sin \psi_j - \cos \psi_j \cdot \cos \varphi_j \cdot \cos \theta_j) + z_{ji} \cdot \sin \theta_j \cdot \cos \psi_j = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Z_{Gi} + x_{ij} \cdot \sin \theta_i \cdot \sin \varphi_i + y_{ij} \cdot \sin \theta_i \cdot \cos \varphi_i + z_{ij} \cdot \cos \theta_i + \\ & + a \cdot [\sin \theta_i \cdot \sin \varphi_i \cdot \cos \gamma_{1i}^0 + \sin \theta_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \cos \gamma_{2i}^0 + \cos \theta_i \cdot \cos \gamma_{3i}^0] - \\ & - Z_{Gj} - x_{ji} \cdot \sin \theta_j \cdot \sin \varphi_j - y_{ji} \cdot \sin \theta_j \cdot \cos \varphi_j - z_{ji} \cdot \cos \theta_j = 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Az (5.15) általános értékű egyenletrendszerből kiindulva, a továbbiakban bemutatjuk az eddigiekben tárgyalt hat alsó osztályú csukló kényszer egyenleteit.

Figyelembe véve, hogy a kényszer egyenletek elve ugyanaz, mint a háromtengelyes forgatás esetén, a továbbiakban csak a programozáshoz szükséges egyenlet-rendszerek összevont alakjait írjuk fel.

## 5.2. Kinematikai párok helyzetét meghatározó kényszer egyenletek az $O_{ij}^*z_i^*$ és az $O_{ji}^*z_j^*$ tengelyek egymásra helyezése esetén

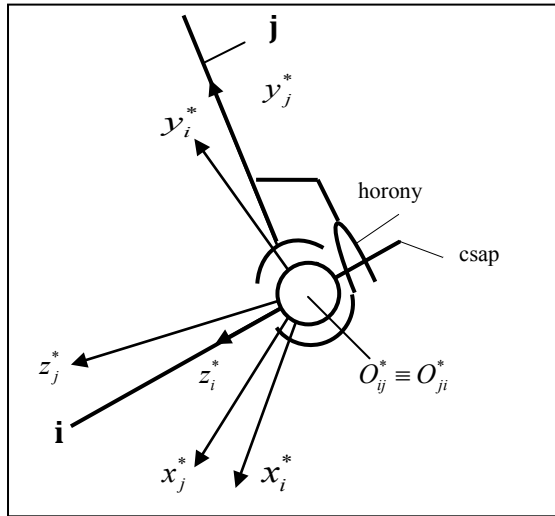
### 5.2.1. A gömbcsukló

A gömbcsukló három kényszert ró ki a kapcsolt tagra, úgy, hogy a három független forgómozgást megengedi, a három haladó mozgást pedig leköti. Ebben az esetben a két kapcsolt tagnak egyetlen közös pontja van, és pedig az egybeeső  $O_{ij}^*$  és  $O_{ji}^*$  origók. Tehát  $\mathbf{a} = 0$ , és a  $\Delta_i$  pedig nem esik egybe kötelező módon a  $\Delta_j$  egyenessel. Az (5.15) egyenletbe behelyettesítve az  $\mathbf{a} = 0$  feltételt, a gömbcsukló kényszer egyenleteihez jutunk, amelyek a következők:

$$\begin{aligned} X_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{1i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + y_{ij} \cdot \cos \beta_{1i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + z_{ij} \cdot \cos \gamma_{1i}(\psi_i, \theta_i) - \\ - X_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{1j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - y_{ji} \cdot \cos \beta_{1j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - \\ - z_{ji} \cdot \cos \gamma_{1j}(\psi_j, \theta_j) = 0 \\ Y_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{2i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + y_{ij} \cdot \cos \beta_{2i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + z_{ij} \cdot \cos \gamma_{2i}(\psi_i, \theta_i) - \\ - Y_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{2j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - y_{ji} \cdot \cos \beta_{2j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - \\ - z_{ji} \cdot \cos \gamma_{2j}(\psi_j, \theta_j) = 0 \\ Z_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{3i}(\theta_i, \varphi_i) + y_{ij} \cdot \cos \beta_{3i}(\theta_i, \varphi_i) + z_{ij} \cdot \cos(\theta_i) - Z_{Gj} - \\ - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{3j}(\theta_j, \varphi_j) - y_{ji} \cdot \cos \beta_{3j}(\theta_j, \varphi_j) - z_{ji} \cdot \cos(\theta_j) = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

### 5.2.2. Az egytetemes csukló (kardánkereszt vagy csapos gömbcsukló)

Ez a csukló szerkezetileg, de akár kivitelezés szempontjából is megegyezhet a gömbcsuklóval, viszont a három független forgás közül az egyik le van kötve. Ennek következményeként a gömbcsuklóra felírt három egyenlethez hozzárendeljük a  $\Delta_i$  és  $\Delta_j$  egyenesek merőlegességi feltételeit, ami azt jelenti például,  $O_{ij}^*z_i^* \perp O_{ji}^*x_j^*$ , ahol az  $O_{ij}^*z_i^*$  tengely egységvektora rá van fektetve a  $\Delta_i$  egyenesre, az  $O_{ji}^*x_j^*$  tengely egységvektora pedig a  $\Delta_j$  egyenesre. Az 5.2. ábra szerint a „j” taghoz rögzített horony és az „i” tag  $O_{ij}^*z_i^*$  tengelyével egybeeső csapja az  $O_{ji}^*y_j^*z_j^*$  síkban helyezkedik el. Az  $O_{ij}^*z_i^*$  tengellyel egybeeső csap csak a saját tengelye vagy a síkra merőleges  $O_{ji}^*x_j^*$  tengely körül fordulhat el. E feltételt a tengelyek egységvektorai skaláris szorzatának nullává tételével fejezzük ki.



5.2. ábra

A csapos gömbcsuklóval kapcsolt kinematikai párnak az egyik rögzítése után két szabadságfoka marad. A kardánkereszt három tagból tevődik össze. Ha az egyiket rögzítjük, a két mozgó tagnak 12 szabadságfoka van. A tagokat összekötő két forgó csukló 10 szabadságfokot zár ki, így marad kettő, amely akár a csapos gömbcsukló esetén két egymásra merőleges tengely körül fordul el. A mechanizmusok szerkezeti vizsgálata szerint, bármely negyedosztályú csukló egy taggal és kizárt mozgásoknak megfelelően, két ötödosztályú csuklóval helyettesíthető. A kardáncsukló esetén a kereszt kinematikáját figyelmen kívül hagyják, illetve nem tárgyalják.

$$\begin{aligned} X_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{1i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + y_{ij} \cdot \cos \beta_{1i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + z_{ij} \cdot \cos \gamma_{1i}(\psi_i, \theta_i) - \\ - X_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{1j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - y_{ji} \cdot \cos \beta_{1j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - \\ - z_{ji} \cdot \cos \gamma_{1j}(\psi_j, \theta_j) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{2i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + y_{ij} \cdot \cos \beta_{2i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + z_{ij} \cdot \cos \gamma_{2i}(\psi_i, \theta_i) - \\ - Y_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{2j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - y_{ji} \cdot \cos \beta_{2j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - \\ - z_{ji} \cdot \cos \gamma_{2j}(\psi_j, \theta_j) = 0 \end{aligned}$$

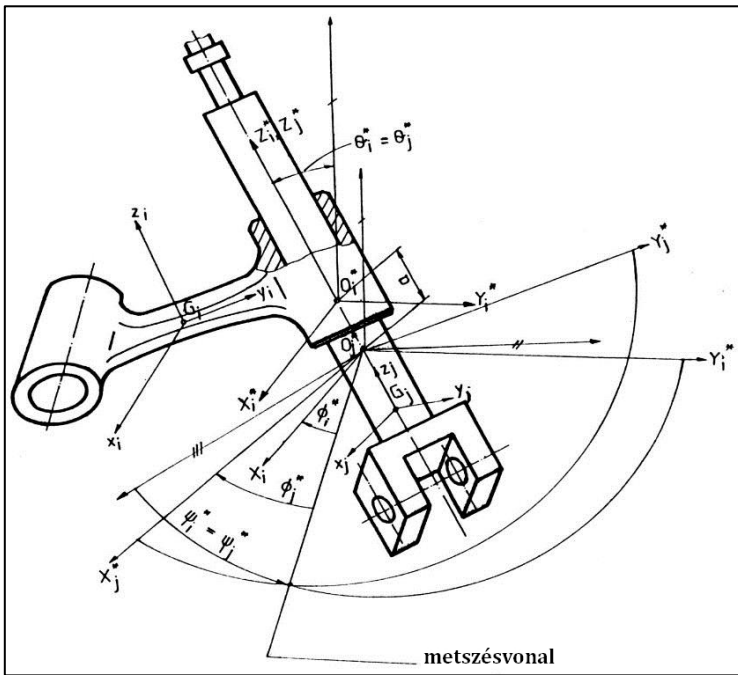
$$\begin{aligned} Z_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{3i}(\theta_i, \varphi_i) + y_{ij} \cdot \cos \beta_{3i}(\theta_i, \varphi_i) + z_{ij} \cdot \cos(\theta_i) - Z_{Gj} - \\ - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{3j}(\theta_j, \varphi_j) - y_{ji} \cdot \cos \beta_{3j}(\theta_j, \varphi_j) - z_{ji} \cdot \cos(\theta_j) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{13i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) \cdot b_{11j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) + b_{23i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) \cdot b_{21j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) + \\ + b_{33i}(\theta_i, \varphi_i) \cdot b_{31j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Az egytetemes csukló kényszer egyenleteiből alkotott rendszer, a négy kizárt mozgásnak megfelelően, négy egyenlethből áll.

**5.2.3. A henger alakú csukló**

A henger alakú csukló megenged egy forgómozgást az  $O_i z_i^*$  körül és egy csúszómozgást e tengely mentén (5.3. ábra). Következésképpen négy kizárt (2 forgó-, 2 csúszó-) mozgásunk van, amely négy kényszer egyenletet visz be a rendszerbe. Az első három kényszer egyenletet az (5.15) összefüggések adják, amelyhez hozzárendelünk két feltételt az (5.12) egyenlőségekből.



5.3. ábra

$$X_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{1i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + y_{ij} \cdot \cos \beta_{1i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + z_{ij} \cdot \cos \gamma_{1i}(\psi_i, \theta_i) + a \cdot b_{13i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) - X_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{1j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - y_{ji} \cdot \cos \beta_{1j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - z_{ji} \cdot \cos \gamma_{1j}(\psi_j, \theta_j) = 0$$

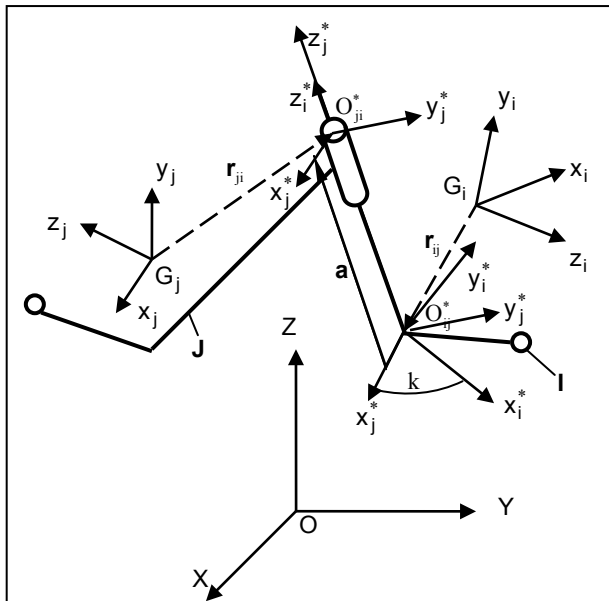
$$Y_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{2i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + y_{ij} \cdot \cos \beta_{2i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + z_{ij} \cdot \cos \gamma_{2i}(\psi_i, \theta_i) + a \cdot b_{23i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) - Y_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{2j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - y_{ji} \cdot \cos \beta_{2j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - z_{ji} \cdot \cos \gamma_{2j}(\psi_j, \theta_j) = 0$$

$$\begin{aligned}
 & Z_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{31i}(\theta_i, \varphi_i) + y_{ij} \cdot \cos \beta_{3i}(\theta_i, \varphi_i) + z_{ij} \cdot \cos(\theta_i) + \\
 & \quad + a \cdot b_{33i}(\theta_i, \varphi_i) - Z_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{3j}(\theta_j, \varphi_j) - y_{ji} \cdot \cos \beta_{3j}(\theta_j, \varphi_j) - \\
 & \quad - z_{ji} \cdot \cos(\theta_j) = 0 \\
 & b_{13i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) - b_{13j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) = 0 \\
 & b_{33i}(\theta_i, \varphi_i) - b_{33j}(\theta_j, \varphi_j) = 0
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Kifejezve az **a** értékét az összefüggések egyikéből és behelyettesítve a másik ket-  
tőbe, az (5.18) egyenletekből alkotott rendszer négy kényszer egyenletből álló  
rendszerre egyszerűsödik. (Az **a** paraméter kiküszöbölése nem kötelező, ismeret-  
lenként a rendszerben maradhat.)

### 5.2.4. A csúszka (keresztfej)

A csúszka három forgó- és két csúszzómozgást zár ki (5.4. ábra), tehát öt kény-  
szeregyenletre van szükség. Az első öt egyenletet a henger alakú csukló, illetve  
a (5.18) kényszer egyenletek adják, amelyekhez hozzáadjuk a (5.1) harmadik felté-  
telét, amellyel az  $O_i z_i^*$  tengely körüli elfordulást rögzítjük, egy **k** állandóval:



5.4. ábra

$$\begin{aligned}
 X_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{1i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + y_{ij} \cdot \cos \beta_{1i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + z_{ij} \cdot \cos \gamma_{1i}(\psi_i, \theta_i) + \\
 + a \cdot b_{13i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) - X_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{1j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - \\
 - y_{ji} \cdot \cos \beta_{1j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - z_{ji} \cdot \cos \gamma_{1j}(\psi_j, \theta_j) = 0 \\
 Y_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{2i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + y_{ij} \cdot \cos \beta_{2i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + z_{ij} \cdot \cos \gamma_{2i}(\psi_i, \theta_i) + \\
 + a \cdot b_{23i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) - Y_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{2j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - \\
 - y_{ji} \cdot \cos \beta_{2j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - z_{ji} \cdot \cos \gamma_{2j}(\psi_j, \theta_j) = 0 \\
 Z_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{3i}(\theta_i, \varphi_i) + y_{ij} \cdot \cos \beta_{3i}(\theta_i, \varphi_i) + z_{ij} \cdot \cos(\theta_i) + \\
 + a \cdot b_{33i}(\theta_i, \varphi_i) - Z_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{3j}(\theta_j, \varphi_j) - \\
 - y_{ji} \cdot \cos \beta_{3j}(\theta_j, \varphi_j) - z_{ji} \cdot \cos(\theta_j) = 0 \\
 b_{13i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) - b_{13j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) = 0 \\
 b_{33i}(\theta_i, \varphi_i) - b_{33j}(\theta_j, \varphi_j) = 0 \\
 b_{31i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) - b_{31j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) = k
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Ebben az esetben is kifejezve az  $a$  értékét az (5.15) összefüggések egyikéből, és behelyettesítve a másik kettőbe, az (5.19) egyenletekből alkotott rendszer öt kényszer egyenletből álló rendszerré egyszerűsödik.

### 5.2.5. A forgó csukló

A forgó csukló egy forgómozgást enged meg az  $O_i z_i^*$  tengely körül. Az öt kizárt mozgásnak megfelelően öt kényszer egyenletünk lesz. Az első hármat az (5.15) egyenletből kapjuk, ahol „ $a$ ” egy tetszőlegesen választható állandó. Ezekhez az egyenletekhez a két kizárt forgómozgásnak megfelelően hozzárendelünk két feltételt az (5.1) egyenlőségekből, és így kapjuk az alábbi rendszert:

$$\begin{aligned}
 X_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{1i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + y_{ij} \cdot \cos \beta_{1i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + z_{ij} \cdot \cos \gamma_{1i}(\psi_i, \theta_i) + \\
 + a \cdot b_{13i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) - X_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{1j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - \\
 - y_{ji} \cdot \cos \beta_{1j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - z_{ji} \cdot \cos \gamma_{1j}(\psi_j, \theta_j) = 0 \\
 Y_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{2i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + y_{ij} \cdot \cos \beta_{2i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + z_{ij} \cdot \cos \gamma_{2i}(\psi_i, \theta_i) + \\
 + a \cdot b_{23i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) - Y_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{2j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - \\
 - y_{ji} \cdot \cos \beta_{2j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - z_{ji} \cdot \cos \gamma_{2j}(\psi_j, \theta_j) = 0 \\
 Z_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{3i}(\theta_i, \varphi_i) + y_{ij} \cdot \cos \beta_{3i}(\theta_i, \varphi_i) + z_{ij} \cdot \cos(\theta_i) + a \cdot b_{33i}(\theta_i, \varphi_i) - \\
 - Z_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{3j}(\theta_j, \varphi_j) - y_{ji} \cdot \cos \beta_{3j}(\theta_j, \varphi_j) - z_{ji} \cdot \cos(\theta_j) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{13i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) - b_{13j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) &= 0 \\
 b_{33i}(\theta_i, \varphi_i) - b_{33j}(\theta_j, \varphi_j) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{5.20}$$

### 5.2.6. A menetes csukló

A menetes csukló annyiban különbözik a henger alakú csuklótól, hogy a forgó- és csúszómozgás között létezik egy lineáris összefüggés. Tehát a csavarmozgás paramétereitől függően csak egy független elmozdulás létezik, legyen ez akár a csavartengely menti elcsúszás, akár a csavartengely körüli elfordulás. A menetes csukló egy **a** változó paraméterű forgó csuklónak is tekinthető. A csukló által ki-zárt mozgások számának megfelelően öt kényszer egyenletre van szükség.

A fent elmondottaknak és az 5.1. ábra jelöléseinek megfelelően, az  $O_i z_i^*$  tengely körüli forgó- és a tengely mentén létező haladó mozgás között léteznie kell a következő összefüggésnek:

$$a = a_0 + \frac{p}{2\pi} \cdot \xi, \tag{5.21}$$

ahol a „ $p$ ” a menet emelkedését, a  $\xi$  pedig az „ $i$ ” és „ $j$ ” tagok között létező relatív forgómozgást fejezi ki. Figyelembe véve az Euler-szögekkel való felépítésnek azt a kitételét, hogy lehetőség szerint a  $z$ -tengelyek essenek egybe, és felismervén azt a tényt, hogy ezek körül történik az utolsó,  $\varphi_k, k \in \{i; j\}$  szerinti forgatás, a kapcsolt tagok relatív elfordulását ezek különbségével írjuk fel:

$$\xi = \varphi_i^* - \varphi_j^* \tag{5.22}$$

Az (5.22) képletet behelyettesítve az (5.21) egyenlőségbe, kapjuk:

$$a = a_0 + \frac{p}{2\pi} \cdot (\varphi_i^* - \varphi_j^*) \tag{5.23}$$

Az (5.6) összefüggésből kifejezzük a  $\phi_i^*$  és  $\theta_i^*$  értékeket, amelyekkel az  $i$  tag saját tengelye körüli  $\phi_i^*$  elfordulási szöge összevont formában írható:

$$\varphi_i^* = \arcsin \frac{b_{31i}}{\sin \theta_i^*}, \theta_i^* = \arccos b_{33i} \tag{5.24}$$

A menetes csukló egyenletrendszerét az általános (5.15) és a forgó csukló kényszer egyenleteinek megfelelő (5.20) feltételek alkotják, megjegyzésként ebben az esetben az **a** paraméter nem lesz egy szabadon választott állandó, hanem a „ $p$ ” lépéstől és az (5.23), (5.24) egyenletekben meghatározott  $\varphi_i^*, \varphi_j^*$  elfordulási szö-

gektől függ. A viszonylagos csavarmozgást megengedő csukló kényszer egyenletei az (5.25) rendszerben vannak összefoglalva:

$$\begin{aligned}
& X_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{1i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + y_{ij} \cdot \cos \beta_{1i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + z_{ij} \cdot \cos \gamma_{1i}(\psi_i, \theta_i) + \\
& \quad + a \cdot b_{13i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) - X_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{1j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - \\
& \quad - y_{ji} \cdot \cos \beta_{1j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - z_{ji} \cdot \cos \gamma_{1j}(\psi_j, \theta_j) = 0 \\
& Y_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{2i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + y_{ij} \cdot \cos \beta_{2i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) + z_{ij} \cdot \cos \gamma_{2i}(\psi_i, \theta_i) + \\
& \quad + a \cdot b_{23i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) - Y_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{2j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - \\
& \quad - y_{ji} \cdot \cos \beta_{2j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) - z_{ji} \cdot \cos \gamma_{2j}(\psi_j, \theta_j) = 0 \\
& Z_{Gi} + x_{ij} \cdot \cos \alpha_{3i}(\theta_i, \varphi_i) + y_{ij} \cdot \cos \beta_{3i}(\theta_i, \varphi_i) + z_{ij} \cdot \cos(\theta_i) + a \cdot b_{33i}(\theta_i, \varphi_i) - \\
& \quad - Z_{Gj} - x_{ji} \cdot \cos \alpha_{3j}(\theta_j, \varphi_j) - y_{ji} \cdot \cos \beta_{3j}(\theta_j, \varphi_j) - z_{ji} \cdot \cos(\theta_j) = 0 \\
& b_{13i}(\psi_i, \theta_i, \varphi_i) - b_{13j}(\psi_j, \theta_j, \varphi_j) = 0 \\
& b_{33i}(\theta_i, \varphi_i) - b_{33j}(\theta_j, \varphi_j) = 0 \\
& a - a_0 - \frac{p}{2\pi} \cdot (\varphi_i^* - \varphi_j^*) = 0 \tag{5.25}
\end{aligned}$$

### 5.3. A sebességek kényszer egyenletei az $O_i^* z_i^*$ és az $O_j^* z_j^*$ tengelyek egymásra helyezése esetén

A mechanizmust alkotó tagok lineáris és szögsebességeinek meghatározása céljából az (5.3), (5.7) és az (5.12) egyenleteket idő függvényében deriváljuk. Mivel az (5.3) egyenletrendszer tagjainak deriváltjait az Euler-szögek idő függvényében való deriválásával számítjuk ki, az (5.7) és (5.8) egyenletekkel kifejezett iránytényezőket egyszerűen  $\alpha_{1i}, \beta_{1i}, \gamma_{1i}, \dots, \alpha_{3i}, \beta_{3i}, \gamma_{3i}, \alpha_{1i}^0, \beta_{1i}^0, \gamma_{1i}^0, \dots, \alpha_{3i}^0, \beta_{3i}^0, \gamma_{3i}^0$ -vel jelöljük. A vektorsokszög mátrixos alakjának deriválása szerint kapjuk a sebességek egyenletét:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{1i} & \dot{\beta}_{1i} & \dot{\gamma}_{1i} & \dot{X}_{Gi} \\ \dot{\alpha}_{2i} & \dot{\beta}_{2i} & \dot{\gamma}_{2i} & \dot{Y}_{Gi} \\ \dot{\alpha}_{3i} & \dot{\beta}_{3i} & \dot{\gamma}_{3i} & \dot{Z}_{Gi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \\ 1 \end{bmatrix} + \dot{a} \cdot \begin{bmatrix} b_{13i} \\ b_{23i} \\ b_{33i} \\ 0 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} \dot{b}_{13i} \\ \dot{b}_{23i} \\ \dot{b}_{33i} \\ 0 \end{bmatrix} - \\
& - \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_{1j} & \dot{\beta}_{1j} & \dot{\gamma}_{1j} & \dot{X}_{Gj} \\ \dot{\alpha}_{2j} & \dot{\beta}_{2j} & \dot{\gamma}_{2j} & \dot{Y}_{Gj} \\ \dot{\alpha}_{3j} & \dot{\beta}_{3j} & \dot{\gamma}_{3j} & \dot{Z}_{Gj} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{ji} \\ y_{ji} \\ z_{ji} \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \tag{5.26}
\end{aligned}$$



ahol:

$$\begin{aligned}
 \dot{\alpha}_{1i} &= -\dot{\psi}_i \cdot \alpha_{2i} + \dot{\varphi}_i \cdot \beta_{1i} + \dot{\theta}_i \cdot \alpha_{3i} \cdot \sin \psi_i \\
 \dot{\beta}_{1i} &= -\dot{\psi}_i \cdot \beta_{2i} - \dot{\varphi}_i \cdot \alpha_{1i} + \dot{\theta}_i \cdot \beta_{3i} \cdot \sin \psi_i \\
 \dot{\gamma}_{1i} &= -\dot{\psi}_i \cdot \gamma_{2i} + \dot{\theta}_i \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \psi_i \\
 \dot{\alpha}_{2i} &= \dot{\psi}_i \cdot \alpha_{1i} + \dot{\varphi}_i \cdot \beta_{2i} - \dot{\theta}_i \cdot \alpha_{3i} \cdot \cos \psi_i \\
 \dot{\beta}_{2i} &= \dot{\psi}_i \cdot \beta_{1i} - \dot{\varphi}_i \cdot \alpha_{2i} - \dot{\theta}_i \cdot \beta_{3i} \cdot \cos \psi_i \\
 \dot{\gamma}_{2i} &= \dot{\psi}_i \cdot \gamma_{1i} - \dot{\theta}_i \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \psi_i \\
 \dot{\alpha}_{3i} &= \dot{\varphi}_i \cdot \beta_{3i} + \dot{\theta}_i \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \varphi_i \\
 \dot{\beta}_{3i} &= -\dot{\varphi}_i \cdot \alpha_{3i} + \dot{\theta}_i \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \varphi_i \\
 \dot{\gamma}_{3i} &= -\dot{\theta}_i \cdot \sin \theta_i
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

A kényszer egyenletekkel kapcsolt kinematikai párok sebességeit a pozíciókhoz hasonlóan határozzuk meg azzal a különbséggel, hogy ebben az esetben minden zárt vektorkontúrra egy-egy lineáris egyenletrendszer írható fel.

### 5.3.1. A gömbcsukló

A gömbcsukló esetén a három haladó mozgás kizárt, a két segédrendszer origói egybeesnek, illetve az „a” távolság zéró, tehát felírható:

$$\dot{a} = a = 0 \tag{5.28}$$

Figyelembe véve az (5.28) feltételt az (5.27) egyenletek behelyettesítése után, az (5.26) egyenletrendszerbe a gömbcsuklóval kapcsolt kinematikai párok sebességét meghatározó (5.29) lineáris egyenletrendszerhez jutunk.

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_{Gi} &- \dot{\psi}_i(x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i}) + \\
 &+ \dot{\theta}_i(x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \sin \psi_i + \dot{\varphi}_i(x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i}) - \\
 &- \dot{X}_{Gj} + \dot{\psi}_j(x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j}) - \\
 &- \dot{\theta}_j(x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \sin \psi_j - \dot{\varphi}_j(x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j}) = 0 \\
 \dot{Y}_{Gi} &+ \dot{\psi}_i(x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) - \\
 &- \dot{\theta}_i(x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \cos \psi_i + \dot{\varphi}_i(x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i}) - \\
 &- \dot{Y}_{Gj} - \dot{\psi}_j(x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) + \\
 &+ \dot{\theta}_j(x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \cos \psi_j - \dot{\varphi}_j(x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j}) = 0 \\
 \dot{Z}_{Gi} &+ \dot{\theta}_i(x_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \varphi_i + y_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \varphi_i - z_{ij} \cdot \sin \theta_i) + \\
 &+ \dot{\varphi}_i(x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i}) - \dot{Z}_{Gj} - \dot{\theta}_j(x_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \sin \varphi_j + y_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \cos \varphi_j - \\
 &- z_{ji} \cdot \sin \theta_j) - \dot{\varphi}_j(x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j}) = 0
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

### 5.3.2. Egyetemes csukló (kardánkereszt vagy csapos gömbcsukló)

Az egyetemes csukló esetén az (5.29) rendszerhez hozzárendeljük az (5.30) feltételeket:

$$\dot{b}_{13i}b_{11j} + b_{13i}\dot{b}_{11j} + \dot{b}_{23i}b_{21j} + b_{23i}\dot{b}_{21j} + \dot{b}_{33i}b_{31j} + b_{33i}\dot{b}_{31j} = 0 \quad (5.30)$$

ahol a deriváltak kifejezéseit az (5.31) egyenletek adják.

Az (5.12), (5.14) egyenletrendszerek deriváltjaiba behelyettesített (5.27) egyenlőségek az ismeretlenek csoportosítása után a következő:

$$\begin{aligned} \dot{b}_{13i} &= -\dot{\psi}_i \cdot (\alpha_{2i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{2i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{2i} \cdot \gamma_{3i}^0) + \\ &\quad + \dot{\theta}_i \cdot (\alpha_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{3i} \cdot \gamma_{3i}^0) \cdot \sin \psi_i + \dot{\varphi}_i \cdot (\beta_{1i} \cdot \gamma_{1i}^0 - \alpha_{1i} \cdot \gamma_{2i}^0) \\ \dot{b}_{23i} &= \dot{\psi}_i \cdot (\alpha_{1i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{1i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{1i} \cdot \gamma_{3i}^0) - \\ &\quad - \dot{\theta}_i \cdot (\alpha_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{3i} \cdot \gamma_{3i}^0) \cdot \cos \psi_i + \dot{\varphi}_i \cdot (\beta_{2i} \cdot \gamma_{1i}^0 - \alpha_{2i} \cdot \gamma_{2i}^0) \\ \dot{b}_{33i} &= \dot{\theta}_i \cdot (\gamma_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 \cdot \sin \varphi_i + \gamma_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0 \cdot \cos \varphi_i + \gamma_{3i}^0 \cdot \sin \theta_i) + \\ &\quad + \dot{\varphi}_i \cdot (\beta_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 - \alpha_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0) \\ \dot{b}_{11j} &= -\dot{\psi}_j \cdot (\alpha_{2j} \cdot \alpha_{1j}^0 + \beta_{2j} \cdot \alpha_{2j}^0 + \gamma_{2j} \cdot \alpha_{3j}^0) + \\ &\quad + \dot{\theta}_j \cdot (\alpha_{3j} \cdot \alpha_{1j}^0 + \beta_{3j} \cdot \alpha_{2j}^0 + \gamma_{3j} \cdot \alpha_{3j}^0) \cdot \sin \psi_j + \dot{\varphi}_j \cdot (\beta_{1j} \cdot \alpha_{1j}^0 - \alpha_{1j} \cdot \alpha_{2j}^0) \\ \dot{b}_{21j} &= \dot{\psi}_j \cdot (\alpha_{1j} \cdot \alpha_{1j}^0 + \beta_{1j} \cdot \alpha_{2j}^0 + \gamma_{1j} \cdot \alpha_{3j}^0) - \\ &\quad - \dot{\theta}_j \cdot (\alpha_{3j} \cdot \alpha_{1j}^0 + \beta_{3j} \cdot \alpha_{2j}^0 + \gamma_{3j} \cdot \alpha_{3j}^0) \cdot \cos \psi_j + \dot{\varphi}_j \cdot (\beta_{2j} \cdot \alpha_{1j}^0 - \alpha_{2j} \cdot \alpha_{2j}^0) \\ \dot{b}_{31j} &= \dot{\theta}_j \cdot [\gamma_{3j} \cdot \alpha_{1j}^0 \cdot \sin \varphi_j + \gamma_{3j} \cdot \alpha_{2j}^0 \cos \varphi_j + \alpha_{3j}^0 \cdot \sin \theta_j] + \\ &\quad + \dot{\varphi}_j \cdot [\beta_{3j} \cdot \alpha_{1j}^0 - \alpha_{2j} \cdot \alpha_{3j}^0] \end{aligned} \quad (5.31)$$

Az (5.30) egyenlet a következő alakban is felírható:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} \cdot b_{11j} + \frac{\partial b_{23i}}{\partial \psi_i} \cdot b_{21j} + \frac{\partial b_{33i}}{\partial \psi_i} \cdot b_{31j} \right] + \\ + \dot{\theta}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} \cdot b_{11j} + \frac{\partial b_{23i}}{\partial \theta_i} \cdot b_{21j} + \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} \cdot b_{31j} \right] + \\ + \dot{\varphi}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} \cdot b_{11j} + \frac{\partial b_{23i}}{\partial \varphi_i} \cdot b_{21j} + \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} \cdot b_{31j} \right] + \\ + \dot{\psi}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{11j}}{\partial \psi_j} \cdot b_{13i} + \frac{\partial b_{21j}}{\partial \psi_j} \cdot b_{23i} + \frac{\partial b_{31j}}{\partial \psi_j} \cdot b_{33i} \right] + \\ + \dot{\theta}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{11j}}{\partial \theta_j} \cdot b_{13i} + \frac{\partial b_{21j}}{\partial \theta_j} \cdot b_{23i} + \frac{\partial b_{31j}}{\partial \theta_j} \cdot b_{33i} \right] + \\ + \dot{\varphi}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{11j}}{\partial \varphi_j} \cdot b_{13i} + \frac{\partial b_{21j}}{\partial \varphi_j} \cdot b_{23i} + \frac{\partial b_{31j}}{\partial \varphi_j} \cdot b_{33i} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.32)$$

ahol

$$\begin{aligned}
\frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} &= -(\alpha_{2i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{2i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{2i} \cdot \gamma_{3i}^0) \\
\frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} &= (\alpha_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{3i} \cdot \gamma_{3i}^0) \cdot \sin \psi_i \\
\frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} &= (\beta_{1i} \cdot \gamma_{1i}^0 - \alpha_{1i} \cdot \gamma_{2i}^0) \\
\frac{\partial b_{23i}}{\partial \psi_i} &= (\alpha_{1i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{1i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{1i} \cdot \gamma_{3i}^0) \\
\frac{\partial b_{23i}}{\partial \theta_i} &= -(\alpha_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{3i} \cdot \gamma_{3i}^0) \cdot \cos \psi_i \\
\frac{\partial b_{23i}}{\partial \varphi_i} &= (\beta_{2i} \cdot \gamma_{1i}^0 - \alpha_{2i} \cdot \gamma_{2i}^0) \\
\frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} &= (\gamma_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 \cdot \sin \varphi_i + \gamma_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0 \cdot \cos \varphi_i + \gamma_{3i}^0 \cdot \sin \theta_i) \\
\frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} &= (\beta_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 - \alpha_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0) \\
\frac{\partial b_{11j}}{\partial \psi_j} &= -(\alpha_{2j} \cdot \alpha_{1j}^0 + \beta_{2j} \cdot \alpha_{2j}^0 + \gamma_{2j} \cdot \alpha_{3j}^0) \\
\frac{\partial b_{11j}}{\partial \theta_j} &= (\alpha_{3j} \cdot \alpha_{1j}^0 + \beta_{3j} \cdot \alpha_{2j}^0 + \gamma_{3j} \cdot \alpha_{3j}^0) \cdot \sin \psi_j \\
\frac{\partial b_{11j}}{\partial \varphi_j} &= (\beta_{1j} \cdot \alpha_{1j}^0 - \alpha_{1j} \cdot \alpha_{2j}^0) \\
\frac{\partial b_{21j}}{\partial \psi_j} &= (\alpha_{1j} \cdot \alpha_{1j}^0 + \beta_{1j} \cdot \alpha_{2j}^0 + \gamma_{1j} \cdot \alpha_{3j}^0) \\
\frac{\partial b_{21j}}{\partial \theta_j} &= -(\alpha_{3j} \cdot \alpha_{1j}^0 + \beta_{3j} \cdot \alpha_{2j}^0 + \gamma_{3j} \cdot \alpha_{3j}^0) \cdot \cos \psi_j \\
\frac{\partial b_{21j}}{\partial \varphi_j} &= (\beta_{2j} \cdot \alpha_{1j}^0 - \alpha_{2j} \cdot \alpha_{2j}^0) \\
\frac{\partial b_{31j}}{\partial \theta_j} &= [\gamma_{3j} \cdot \alpha_{1j}^0 \cdot \sin \varphi_j + \gamma_{3j} \cdot \alpha_{2j}^0 \cos \varphi_j + \alpha_{3j}^0 \cdot \sin \theta_j] \\
\frac{\partial b_{31j}}{\partial \varphi_j} &= [\beta_{3j} \cdot \alpha_{1j}^0 - \alpha_{2j} \cdot \alpha_{3j}^0]
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Az (5.29) és az (5.32) egyenleteket az (5.34) rendszerbe foglalva az egytetemes csuklóval kapcsolt kinematikai pár sebességeit meghatározó kényszer egyenletekhez jutunk, azaz:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_{Gi} - \dot{\psi}_i(x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i}) + \\
+ \dot{\theta}_i(x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \sin \psi_i + \dot{\varphi}_i(x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i}) - \\
- \dot{X}_{Gj} + \dot{\psi}_j(x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j}) - \\
- \dot{\theta}_j(x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \sin \psi_j - \dot{\varphi}_j(x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j}) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dot{Y}_{Gi} + \dot{\psi}_i(x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) - \\
 & \quad - \dot{\theta}_i(x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \cos \psi_i + \dot{\varphi}_i(x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i}) - \\
 & \quad - \dot{Y}_{Gj} - \dot{\psi}_j(x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) + \\
 & \quad + \dot{\theta}_j(x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \cos \psi_j - \dot{\varphi}_j(x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j}) = 0 \\
 & \dot{Z}_{Gi} + \dot{\theta}_i(x_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \varphi_i + y_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \varphi_i - z_{ij} \cdot \sin \theta_i) + \\
 & \quad + \dot{\varphi}_i(x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i}) - \dot{Z}_{Gj} - \dot{\theta}_j(x_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \sin \varphi_j + \\
 & \quad + y_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \cos \varphi_j - z_{ji} \cdot \sin \theta_j) - \dot{\varphi}_j(x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j}) = 0 \\
 & \psi_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} \cdot b_{11j} + \frac{\partial b_{23i}}{\partial \psi_i} \cdot b_{21j} + \frac{\partial b_{33i}}{\partial \psi_i} \cdot b_{31j} \right] + \\
 & \quad + \dot{\theta}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} \cdot b_{11j} + \frac{\partial b_{23i}}{\partial \theta_i} \cdot b_{21j} + \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} \cdot b_{31j} \right] + \\
 & \quad + \dot{\varphi}_i \cdot \left[ \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} \cdot b_{11j} + \frac{\partial b_{23i}}{\partial \varphi_i} \cdot b_{21j} + \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} \cdot b_{31j} \right] + \\
 & \quad + \dot{\psi}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{11j}}{\partial \psi_j} \cdot b_{13i} + \frac{\partial b_{21j}}{\partial \psi_j} \cdot b_{23i} + \frac{\partial b_{31j}}{\partial \psi_j} \cdot b_{33i} \right] + \\
 & \quad + \dot{\theta}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{11j}}{\partial \theta_j} \cdot b_{13i} + \frac{\partial b_{21j}}{\partial \theta_j} \cdot b_{23i} + \frac{\partial b_{31j}}{\partial \theta_j} \cdot b_{33i} \right] + \\
 & \quad + \dot{\varphi}_j \cdot \left[ \frac{\partial b_{11j}}{\partial \varphi_j} \cdot b_{13i} + \frac{\partial b_{21j}}{\partial \varphi_j} \cdot b_{23i} + \frac{\partial b_{31j}}{\partial \varphi_j} \cdot b_{33i} \right] = 0 \tag{5.34}
 \end{aligned}$$

Az (5.34) egyenlet zárójelbe foglalt tagjainak értékei ismertek, illetve amint az (5.27), (5.31) és az (5.33) egyenlőségekből kitűnik, visszavezethetők a tagok pozícióit meghatározó függvények ismert értékeire.

### 5.3.3. A hengeres csukló

Ahhoz, hogy meghatározzuk a hengeres csuklóval kapcsolt kinematikai pár sebességét meghatározó rendszer első három egyenletének általános alakját, az (5.26) mátrixegyenletbe behelyettesítjük az (5.27) egyenlőségeket, amelyhez hozzárendeljük az (5.35) feltételeket.

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_i^* = \dot{\theta}_j^* \quad \text{vagyis} \quad \dot{b}_{33i} = \dot{b}_{33j} \quad \text{vagyis} \quad \dot{b}_{33i} - \dot{b}_{33j} = 0 \\
 \dot{\psi}_i^* = \dot{\psi}_j^* \quad \dot{b}_{13i} = \dot{b}_{13j} \quad \dot{b}_{13i} - \dot{b}_{13j} = 0
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

A hengeres csuklóval kapcsolt kinematikai pár sebességét meghatározó egyenletrendszer a következő:

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_{Gi} - \dot{\psi}_i(x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i} - a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i}) + \dot{a} \cdot b_{13i} + \\
 + \dot{\theta}_i \left[ (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \sin \psi_i + a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\dot{\varphi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} \right) - \dot{X}_{Gj} + \\
 & +\dot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j}) - \\
 & -\dot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \sin \psi_j - \dot{\varphi}_j (x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j}) = 0 \\
 \dot{Y}_{Gi} & + \dot{\psi}_i \left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \psi_i} \right) + \dot{a} \cdot b_{23i} - \\
 & -\dot{\theta}_i [(x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \cos \psi_i - a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \theta_i}] + \\
 & +\dot{\varphi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \varphi_i} \right) - \dot{Y}_{Gj} - \\
 & -\dot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) + \\
 & +\dot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \cos \psi_j - \dot{\varphi}_j (x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j}) = 0 \\
 \dot{Z}_{Gi} & + \dot{\theta}_i \left( x_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \varphi_i + y_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \varphi_i - z_{ij} \cdot \sin \theta_i + a \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{a} \cdot b_{33i} + \\
 & \dot{\varphi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i} + a \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} \right) - \dot{Z}_{Gj} - \\
 & -\dot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \sin \varphi_j + y_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \cos \varphi_j - z_{ji} \cdot \sin \theta_j) - \\
 & -\dot{\varphi}_j (x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j}) = 0 \\
 \dot{\psi}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} & + \dot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} - (\dot{\psi}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \psi_j} + \dot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \theta_j} + \dot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \varphi_j}) = 0 \\
 \dot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} & + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} - (\dot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \theta_j} + \dot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \varphi_j}) = 0 \tag{5.36}
 \end{aligned}$$

### 5.3.4. A csúszka (keresztfej)

A csúszkával kapcsolt kinematikai pár sebességeit meghatározó kényszer egyenletek megegyeznek a hengeres csukló kényszer egyenleteivel, amelyhez még hozzá kell rendelni – akárcsak a pozíciók meghatározása esetében – az (5.37) feltételt, amellyel kizártuk az összes relatív szögsebesség létezését a két tag között.

$$\dot{\varphi}_i^* = \dot{\varphi}_j^* \quad \text{illetve} \quad \dot{b}_{31i} - \dot{b}_{31j} = 0 \tag{5.37}$$

Az így alkotott rendszer a következő:

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_{Gi} & - \dot{\psi}_i \left( x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i} - a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} \right) + \dot{a} \cdot b_{13i} + \\
 & + \dot{\theta}_i \left[ (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \sin \psi_i + a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} \right] + \\
 & + \dot{\varphi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} \right) - \dot{X}_{Gj} + \\
 & + \dot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j}) - \\
 & - \dot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \sin \psi_j - \dot{\varphi}_j (x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j}) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dot{Y}_{Gi} + \dot{\psi}_i \left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \psi_i} \right) + \dot{a} \cdot b_{23i} - \\
 & \quad - \dot{\theta}_i \left[ (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \cos \psi_i - a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \theta_i} \right] + \\
 & \quad + \dot{\phi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \phi_i} \right) - \dot{Y}_{Gj} - \\
 & \quad - \dot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) + \\
 & \quad + \dot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \cos \psi_j - \dot{\phi}_j (x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j}) = 0 \\
 & \dot{Z}_{Gi} + \dot{\theta}_i \left( x_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \varphi_i + y_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \varphi_i - z_{ij} \cdot \sin \theta_i + a \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} \right) + \\
 & \quad + \dot{a} \cdot b_{33i} + \dot{\phi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i} + a \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \phi_i} \right) - \dot{Z}_{Gj} - \\
 & \quad - \dot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \sin \varphi_j + y_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \cos \varphi_j - z_{ji} \cdot \sin \theta_j) - \\
 & \quad - \dot{\phi}_j (x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j}) = 0 \\
 & \dot{\psi}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} + \dot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} + \dot{\phi}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \phi_i} - (\dot{\psi}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \psi_j} + \dot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \theta_j} + \dot{\phi}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \phi_j}) = 0 \\
 & \dot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} + \dot{\phi}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \phi_i} - (\dot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \theta_j} + \dot{\phi}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \phi_j}) = 0 \\
 & \dot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \theta_i} + \dot{\phi}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \phi_i} - (\dot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \theta_j} + \dot{\phi}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \phi_j}) = 0
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

### 5.3.5. A forgó csukló

A forgó csuklóval kapcsolt kinematikai pár sebességeit meghatározó kényszer egyenletek abban különböznek a hengeres csukló kényszer egyenleteitől, hogy az  $a$  paraméter állandó (amely zéró is lehet). Tehát az  $\dot{a} = 0$ , így az (5.36) egyenletrendszer a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned}
 & \dot{X}_{Gi} - \dot{\psi}_i \left( x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i} - a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} \right) + \\
 & \quad + \dot{\theta}_i \left[ (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \sin \psi_i + a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} \right] + \\
 & \quad + \dot{\phi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \phi_i} \right) - \dot{X}_{Gj} + \\
 & \quad + \dot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j}) - \\
 & \quad - \dot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \sin \psi_j - \dot{\phi}_j (x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j}) = 0 \\
 & \dot{Y}_{Gi} + \dot{\psi}_i \left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \psi_i} \right) -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{\theta}_i \left[ (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \cos \psi_i - a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \theta_i} \right] + \\
& + \dot{\varphi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \varphi_i} \right) - \dot{Y}_{Gj} - \\
& - \dot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) + \\
& + \dot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \cos \psi_j - \dot{\varphi}_j (x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j}) = 0 \\
\dot{Z}_{Gi} + \dot{\theta}_i \left( x_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \varphi_i + y_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \varphi_i - z_{ij} \cdot \sin \theta_i + a \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} \right) + \\
& + \dot{\varphi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i} + a \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} \right) - \dot{Z}_{Gj} - \\
& - \dot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \sin \varphi_j + y_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \cos \varphi_j - z_{ji} \cdot \sin \theta_j) - \\
& - \dot{\varphi}_j (x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j}) = 0 \\
\psi_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} + \dot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} - (\dot{\psi}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \psi_j} + \dot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \theta_j} + \dot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \varphi_j}) = 0 \\
\dot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} - (\dot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \theta_j} + \dot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \varphi_j}) = 0 \tag{5.39}
\end{aligned}$$

### 5.3.6. A menetes csukló

A menetes csukló által kapcsolt tagok sebességének meghatározása céljából a hengeres csukló egyenleteit használjuk, amelyekhez hozzárendeljük az (5.22) és az (5.23) egyenletek deriváltjai által kapott feltételeket.

$$\begin{aligned}
\dot{\zeta} &= \dot{\varphi}_i^* - \dot{\varphi}_j^* \\
\dot{a} &= \frac{p}{2\pi} \cdot (\dot{\varphi}_i^* - \dot{\varphi}_j^*) \tag{5.40}
\end{aligned}$$

Az (5.41) egyenlőség  $\dot{\varphi}_i^*$  és  $\dot{\varphi}_j^*$  szögsebességeit az (5.24) egyenlet deriválása után kapjuk, azaz:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_i^* &= \frac{1}{b_{32i}} \cdot \left( \dot{b}_{31i} + \frac{\dot{b}_{33i} \cdot b_{33i}}{\sin \theta_i^*} \right) \\
\dot{\varphi}_j^* &= \frac{1}{b_{32j}} \cdot \left( \dot{b}_{31j} + \frac{\dot{b}_{33j} \cdot b_{33j}}{\sin \theta_j^*} \right) \tag{5.41}
\end{aligned}$$

A menetes csuklóhoz tartozó sebességet meghatározó kényszer egyenletek a következők:

$$\begin{aligned}
\dot{X}_{Gi} - \dot{\psi}_i \left( x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i} - a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} \right) + \dot{a} \cdot b_{13i} + \\
+ \dot{\theta}_i \left[ (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \sin \psi_i + a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\dot{\varphi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} \right) - \dot{X}_{Gj} + \\
 & +\dot{\psi}_j \left( x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j} \right) - \\
 & -\dot{\theta}_j \left( x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j} \right) \sin \psi_j - \dot{\varphi}_j \left( x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j} \right) = 0 \\
 \dot{Y}_{Gi} + \dot{\psi}_i \left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \psi_i} \right) + \dot{a} \cdot b_{23i} - \\
 & -\dot{\theta}_i \left[ \left( x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i} \right) \cos \psi_i - a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \theta_i} \right] + \\
 & +\dot{\varphi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \varphi_i} \right) - \dot{Y}_{Gj} - \\
 & -\dot{\psi}_j \left( x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j} \right) + \\
 & +\dot{\theta}_j \left( x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j} \right) \cos \psi_j - \dot{\varphi}_j \left( x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j} \right) = 0 \\
 \dot{Z}_{Gi} + \dot{\theta}_i \left( x_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \varphi_i + y_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \varphi_i - z_{ij} \cdot \sin \theta_i + a \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} \right) + \\
 & +\dot{a} \cdot b_{33i} + \dot{\varphi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i} + a \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} \right) - \\
 & -\dot{Z}_{Gj} - \dot{\theta}_j \left( x_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \sin \varphi_j + y_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \cos \varphi_j - z_{ji} \cdot \sin \theta_j \right) - \\
 & -\dot{\varphi}_j \left( x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j} \right) = 0 \\
 \dot{\psi}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} + \dot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} - \left( \dot{\psi}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \psi_j} + \dot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \theta_j} + \dot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \varphi_j} \right) = 0 \\
 \dot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} - \left( \dot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \theta_j} + \dot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \varphi_j} \right) = 0 \\
 \dot{a} - \frac{p}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{b_{32i}} \cdot \left( \dot{b}_{31i} + \frac{\dot{b}_{33i} \cdot b_{33i}}{\sin \theta_i^*} \right) - \frac{1}{b_{32j}} \cdot \left( \dot{b}_{31j} + \frac{\dot{b}_{33j} \cdot b_{33j}}{\sin \theta_j^*} \right) \right] = 0 \tag{5.42}
 \end{aligned}$$

*Megjegyzés:*

A mechanizmus tagjainak sebességét meghatározó kényszer egyenletek általános alakban vannak írva. Gyakorlatilag a fenti kényszer egyenletek sokkal egyszerűbb, az egyes sajátos eseteknek megfelelő alakra hozhatók.

Ha például síkban fekvő mechanizmusról van szó, akkor a sebességeket meghatározó kényszer egyenleteknek csak két lineáris és egy szögsebességi változója van.

Ha a kapcsolódó, hengeres, forgó vagy menetes csukló szimmetriatengelye csak önmagával párhuzamosan mozdul el, akkor a segédrendszer iránytényezői változatlanok. Ezek deriváltjai zérók, amelyek a csuklókhöz tartozó kényszer egyenletek számát hárommal csökkentik.



A tagok sebességét meghatározó kényszer egyenletekből alkotott egyenletrendszer elsőfokú, illetve lineáris rendszer.

A sebesség kényszer egyenleteinek száma mindig egyenlő az ismeretlenek számával.

#### 5.4. A gyorsulások kényszer egyenletei

A gyorsulások kényszer egyenleteivel a tagok lineáris és szöggyorsulásait határozzák meg. A szükséges kényszer egyenlet-rendszert úgy állítjuk elő, hogy az (5.26) mátrixegyenletet, illetve a sebesség összes egyenletét és feltételét idő függvényében deriválják.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_{1i} & \ddot{\beta}_{1i} & \dot{\gamma}_{1i} & \ddot{X}_{Gi} \\ \ddot{\alpha}_{2i} & \ddot{\beta}_{2i} & \dot{\gamma}_{2i} & \ddot{Y}_{Gi} \\ \ddot{\alpha}_{3i} & \ddot{\beta}_{3i} & \dot{\gamma}_{3i} & \ddot{Z}_{Gi} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{ij} \\ y_{ij} \\ z_{ij} \\ 1 \end{bmatrix} + \ddot{a} \cdot \begin{bmatrix} b_{13i} \\ b_{23i} \\ b_{33i} \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \dot{a} \cdot \begin{bmatrix} \dot{b}_{13i} \\ \dot{b}_{23i} \\ \dot{b}_{33i} \\ 0 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} \ddot{b}_{13i} \\ \ddot{b}_{23i} \\ \ddot{b}_{33i} \\ 0 \end{bmatrix} - \\ & - \begin{bmatrix} \ddot{\alpha}_{1j} & \ddot{\beta}_{1j} & \dot{\gamma}_{1j} & \ddot{X}_{Gj} \\ \ddot{\alpha}_{2j} & \ddot{\beta}_{2j} & \dot{\gamma}_{2j} & \ddot{Y}_{Gj} \\ \ddot{\alpha}_{3j} & \ddot{\beta}_{3j} & \dot{\gamma}_{3j} & \ddot{Z}_{Gj} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{ji} \\ y_{ji} \\ z_{ji} \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (5.43)$$

ahol az iránytényezők az (5.27) egyenlőségek deriváltjai, amelyek a következők:

$$\ddot{\alpha}_{1i} = -\dot{\psi}_i \cdot \dot{\alpha}_{2i} + \ddot{\varphi}_i \beta_{1i} + \ddot{\theta}_i \cdot \alpha_{3i} \cdot \sin \psi_i - \dot{\psi}_i \cdot \dot{\alpha}_{2i} + \dot{\varphi}_i \cdot \dot{\beta}_{1i} + \dot{\theta}_i \cdot \dot{\alpha}_{3i} \cdot \sin \psi_i + \dot{\theta}_i \dot{\psi}_i \cdot \alpha_{3i} \cdot \cos \psi_i$$

$$\ddot{\beta}_{1i} = -\dot{\psi}_i \cdot \dot{\beta}_{2i} - \ddot{\varphi}_i \alpha_{1i} + \ddot{\theta}_i \cdot \beta_{3i} \cdot \sin \psi_i - \dot{\psi}_i \cdot \dot{\beta}_{2i} - \dot{\varphi}_i \cdot \dot{\alpha}_{1i} + \dot{\theta}_i \cdot \dot{\beta}_{3i} \cdot \sin \psi_i + \dot{\theta}_i \dot{\psi}_i \cdot \beta_{3i} \cdot \cos \psi_i$$

$$\dot{\gamma}_{1i} = -\dot{\psi}_i \cdot \gamma_{2i} + \ddot{\theta}_i \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \psi_i - \dot{\psi}_i \cdot \dot{\gamma}_{2i} + \dot{\theta}_i \cdot \dot{\gamma}_{3i} \cdot \sin \psi_i + \dot{\theta}_i \dot{\psi}_i \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \psi_i$$

$$\ddot{\alpha}_{2i} = \dot{\psi}_i \cdot \alpha_{1i} + \ddot{\varphi}_i \beta_{2i} - \ddot{\theta}_i \cdot \alpha_{3i} \cdot \cos \psi_i + \dot{\psi}_i \cdot \dot{\alpha}_{1i} + \dot{\varphi}_i \cdot \dot{\beta}_{2i} - \dot{\theta}_i \cdot \dot{\alpha}_{3i} \cdot \cos \psi_i + \dot{\theta}_i \dot{\psi}_i \cdot \alpha_{3i} \cdot \sin \psi_i$$

$$\ddot{\beta}_{2i} = \dot{\psi}_i \cdot \beta_{1i} - \ddot{\varphi}_i \alpha_{2i} - \ddot{\theta}_i \cdot \beta_{3i} \cdot \cos \psi_i + \dot{\psi}_i \cdot \dot{\beta}_{1i} - \dot{\varphi}_i \cdot \dot{\alpha}_{2i} - \dot{\theta}_i \cdot \dot{\beta}_{3i} \cdot \cos \psi_i + \dot{\theta}_i \dot{\psi}_i \cdot \beta_{3i} \cdot \sin \psi_i$$

$$\dot{\gamma}_{2i} = \dot{\psi}_i \cdot \gamma_{1i} - \ddot{\theta}_i \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \psi_i + \dot{\psi}_i \cdot \dot{\gamma}_{1i} + \dot{\theta}_i \cdot \dot{\gamma}_{3i} \cdot \cos \psi_i + \dot{\theta}_i \dot{\psi}_i \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \psi_i$$

$$\ddot{\alpha}_{3i} = \ddot{\varphi}_i \cdot \beta_{3i} + \ddot{\theta}_i \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \varphi_i + \dot{\varphi}_i \cdot \dot{\beta}_{3i} + s + \dot{\theta}_i \cdot \dot{\gamma}_{3i} \cdot \sin \varphi_i + \dot{\theta}_i \dot{\varphi}_i \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \varphi_i$$

5. KINEMATIKAI PÁROK EULER-SZÖGEKKEL KIFEJEZETT KÉNYSZEREGYENLETEI

$$\begin{aligned}\ddot{\beta}_{3i} &= -\ddot{\varphi}_i \cdot \alpha_{3i} + \ddot{\theta}_i \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \varphi_i - \dot{\varphi}_i \cdot \dot{\alpha}_{3i} + \dot{\theta}_i \cdot \dot{\gamma}_{3i} \cdot \cos \varphi_i - \dot{\theta}_i \dot{\varphi}_i \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \varphi_i \\ \ddot{\gamma}_{3i} &= -\ddot{\theta}_i \cdot \sin \theta_i - \dot{\theta}_i^2 \cdot \cos \theta_i\end{aligned}\quad (5.44)$$

Az (5.31) egyenlőségek deriváltjai a következők:

$$\begin{aligned}\ddot{b}_{13i} &= \ddot{\psi}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} + \ddot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} + \ddot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} + \dot{\psi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} \right) + \dot{\theta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} \right) + \\ &+ \dot{\varphi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} \right)\end{aligned}\quad (5.45)$$

ahol

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} \right) &= \frac{\partial b_{13i}^2}{\partial \psi_i^2} \cdot \dot{\psi}_i + \frac{\partial b_{13i}^2}{\partial \psi_i \partial \theta_i} \cdot \dot{\theta}_i + \frac{\partial b_{13i}^2}{\partial \psi_i \partial \varphi_i} \cdot \dot{\varphi}_i = \frac{d}{dt} [ -(\alpha_{2i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{2i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{2i} \cdot \\ &\gamma_{3i}^0) ] = -(\dot{\alpha}_{2i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \dot{\beta}_{2i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \dot{\gamma}_{2i} \cdot \gamma_{3i}^0)\end{aligned}\quad (5.46)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} \right) &= \frac{\partial b_{13i}^2}{\partial \theta_i^2} \cdot \dot{\theta}_i + \frac{\partial b_{13i}^2}{\partial \theta_i \partial \psi_i} \cdot \dot{\psi}_i + \frac{\partial b_{13i}^2}{\partial \theta_i \partial \varphi_i} \cdot \dot{\varphi}_i = \\ &= \frac{d}{dt} [ (\alpha_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{3i} \cdot \gamma_{3i}^0) \cdot \sin \psi_i ] = \\ &= (\dot{\alpha}_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \dot{\beta}_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \dot{\gamma}_{3i} \cdot \gamma_{3i}^0) \cdot \sin \psi_i + \\ &+ \dot{\psi}_i \cdot (\alpha_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{3i} \cdot \gamma_{3i}^0) \cdot \cos \psi_i\end{aligned}\quad (5.47)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} \right) &= \frac{\partial b_{13i}^2}{\partial \varphi_i^2} \cdot \dot{\varphi}_i + \frac{\partial b_{13i}^2}{\partial \varphi_i \partial \psi_i} \cdot \dot{\psi}_i + \frac{\partial b_{13i}^2}{\partial \varphi_i \partial \theta_i} \cdot \dot{\theta}_i = \\ &= \frac{d}{dt} [ \beta_{1i} \cdot \gamma_{1i}^0 - \alpha_{1i} \cdot \gamma_{2i}^0 ] = \dot{\beta}_{1i} \cdot \gamma_{1i}^0 - \dot{\alpha}_{1i} \cdot \gamma_{2i}^0\end{aligned}\quad (5.48)$$

$$\begin{aligned}\ddot{b}_{23i} &= \ddot{\psi}_i \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \psi_i} + \ddot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \theta_i} + \ddot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \varphi_i} + \dot{\psi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \psi_i} \right) + \dot{\theta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \theta_i} \right) + \\ &+ \dot{\varphi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \varphi_i} \right)\end{aligned}\quad (5.49)$$

a deriválási szabályok részletezése nélkül felírhatók az alábbi összefüggések:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \psi_i} \right) = \frac{d}{dt} [ \alpha_{1i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{1i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{1i} \cdot \gamma_{3i}^0 ] = \dot{\alpha}_{1i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \dot{\beta}_{1i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \dot{\gamma}_{1i} \cdot \gamma_{3i}^0\quad (5.50)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \theta_i} \right) &= \frac{d}{dt} [ -(\alpha_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{3i} \cdot \gamma_{3i}^0) \cdot \cos \psi_i ] = \\ &= -(\dot{\alpha}_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \dot{\beta}_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \dot{\gamma}_{3i} \cdot \gamma_{3i}^0) \cdot \cos \psi_i + \\ &+ \dot{\psi}_i \cdot (\alpha_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 + \beta_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0 + \gamma_{3i} \cdot \gamma_{3i}^0) \cdot \sin \psi_i\end{aligned}\quad (5.51)$$

5. KINEMATIKAI PÁROK EULER-SZÖGEEKKEL KIFEJEZETT KÉNYSZEREGYENLETEI

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \varphi_i} \right) = \frac{d}{dt} [\beta_{2i} \cdot \gamma_{1i}^0 - \alpha_{2i} \cdot \gamma_{2i}^0] = \dot{\beta}_{2i} \cdot \gamma_{1i}^0 - \dot{\alpha}_{2i} \cdot \gamma_{2i}^0 \quad (5.52)$$

$$\ddot{b}_{33i} = \ddot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} + \ddot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} + \dot{\theta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} \right) \quad (5.53)$$

Innen a deriváltak kifejtett alakja a következő:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} \right) &= \frac{d}{dt} [\gamma_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 \cdot \sin \varphi_i + \gamma_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0 \cdot \cos \varphi_i - \gamma_{3i}^0 \cdot \sin \theta_i] = \\ &= \dot{\gamma}_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 \cdot \sin \varphi_i + \dot{\varphi}_i \cdot \gamma_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 \cdot \cos \varphi_i + \\ &+ \dot{\gamma}_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0 \cdot \cos \varphi_i - \dot{\varphi}_i \cdot \gamma_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0 \cdot \sin \varphi_i - \dot{\theta}_i \cdot \gamma_{3i}^0 \cdot \cos \theta_i \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} \right) = \frac{d}{dt} [\beta_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 - \alpha_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0] = \dot{\beta}_{3i} \cdot \gamma_{1i}^0 - \dot{\alpha}_{3i} \cdot \gamma_{2i}^0 \quad (5.55)$$

Továbbá felírhatók az „i” taggal kapcsolt „j” tag geometriai rendszeréhez tartozó  $O_j^* x_j$  tengely irányítványezőinek másodrendű, idő szerinti deriváltjai

$$\begin{aligned} \ddot{b}_{11j} &= \ddot{\psi}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \psi_j} + \ddot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \theta_j} + \ddot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \varphi_j} + \dot{\psi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11j}}{\partial \psi_j} \right) + \dot{\theta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11j}}{\partial \theta_j} \right) + \\ &+ \dot{\varphi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11j}}{\partial \varphi_j} \right) \end{aligned} \quad (5.56)$$

ahol az idő függvényében deriválható irányítványezők kifejezett alakja a következő:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11j}}{\partial \psi_j} \right) &= \frac{d}{dt} [-(\alpha_{2j} \cdot \alpha_{1j}^0 + \beta_{2j} \cdot \alpha_{2j}^0 + \gamma_{2j} \cdot \alpha_{3j}^0)] = \\ &= -(\dot{\alpha}_{2j} \cdot \alpha_{1j}^0 + \dot{\beta}_{2j} \cdot \alpha_{2j}^0 + \dot{\gamma}_{2j} \cdot \alpha_{3j}^0) \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11j}}{\partial \theta_j} \right) &= \frac{d}{dt} [(\alpha_{3j} \cdot \alpha_{1j}^0 + \beta_{3j} \cdot \alpha_{2j}^0 + \gamma_{3j} \cdot \alpha_{3j}^0) \cdot \sin \psi_j] = \\ &= (\dot{\alpha}_{3j} \cdot \alpha_{1j}^0 + \dot{\beta}_{3j} \cdot \alpha_{2j}^0 + \dot{\gamma}_{3j} \cdot \alpha_{3j}^0) \cdot \sin \psi_j + \\ &+ \dot{\psi}_j \cdot (\alpha_{3j} \cdot \alpha_{1j}^0 + \beta_{3j} \cdot \alpha_{2j}^0 + \gamma_{3j} \cdot \alpha_{3j}^0) \cdot \cos \psi_j \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11j}}{\partial \varphi_j} \right) = \frac{d}{dt} [\beta_{1j} \cdot \alpha_{1j}^0 - \alpha_{1j} \cdot \alpha_{2j}^0] = \dot{\beta}_{1j} \cdot \alpha_{1j}^0 - \dot{\alpha}_{1j} \cdot \alpha_{2j}^0 \quad (5.59)$$

Hasonlóképpen járunk el a másik két irányítványező esetében is:

$$\begin{aligned} \ddot{b}_{21j} &= \ddot{\psi}_j \cdot \frac{\partial b_{21j}}{\partial \psi_j} + \ddot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{21j}}{\partial \theta_j} + \ddot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{21j}}{\partial \varphi_j} + \dot{\psi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21j}}{\partial \psi_j} \right) + \dot{\theta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21j}}{\partial \theta_j} \right) + \\ &+ \dot{\varphi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21j}}{\partial \varphi_j} \right) \end{aligned} \quad (5.60)$$

A parciális deriváltak idő szerinti deriváltjai a következők:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21j}}{\partial \psi_j} \right) = \frac{d}{dt} [\alpha_{1j} \cdot \alpha_{1j}^0 + \beta_{1j} \cdot \alpha_{2j}^0 + \gamma_{1j} \cdot \alpha_{3j}^0] = [\dot{\alpha}_{1j} \cdot \alpha_{1j}^0 + \dot{\beta}_{1j} \cdot \alpha_{2j}^0 + \dot{\gamma}_{1j} \cdot \alpha_{3j}^0] \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21j}}{\partial \theta_j} \right) &= \frac{d}{dt} [-(\alpha_{3j} \cdot \alpha_{1j}^0 + \beta_{3j} \cdot \alpha_{2j}^0 + \gamma_{3j} \cdot \alpha_{3j}^0) \cdot \cos \psi_j] = \\ &= \left[ -(\dot{\alpha}_{3j} \cdot \alpha_{1j}^0 + \dot{\beta}_{3j} \cdot \alpha_{2j}^0 + \dot{\gamma}_{3j} \cdot \alpha_{3j}^0) \cdot \cos \psi_j + \right. \\ &\quad \left. + \dot{\psi}_j \cdot (\alpha_{3j} \cdot \alpha_{1j}^0 + \beta_{3j} \cdot \alpha_{2j}^0 + \gamma_{3j} \cdot \alpha_{3j}^0) \cdot \sin \psi_j \right] \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21j}}{\partial \varphi_j} \right) = \frac{d}{dt} [\beta_{2j} \cdot \alpha_{1j}^0 - \alpha_{2j} \cdot \alpha_{2j}^0] = [\dot{\beta}_{2j} \cdot \alpha_{1j}^0 - \dot{\alpha}_{2j} \cdot \alpha_{2j}^0] \quad (5.63)$$

Végül:

$$\ddot{b}_{31j} = \ddot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \theta_j} + \ddot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \varphi_j} + \dot{\theta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31j}}{\partial \theta_j} \right) + \dot{\varphi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31j}}{\partial \varphi_j} \right) \quad (5.64)$$

a következő részkifejezésekkel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31j}}{\partial \theta_j} \right) &= \frac{d}{dt} [\gamma_{3j} \cdot \alpha_{1j}^0 \cdot \sin \varphi_j + \gamma_{3j} \cdot \alpha_{2j}^0 \cos \varphi_j + \alpha_{3j}^0 \cdot \sin \theta_j] = \\ &= \left[ \dot{\gamma}_{3j} \cdot \alpha_{1j}^0 \cdot \sin \varphi_j + \dot{\varphi}_j \cdot \gamma_{3j} \cdot \alpha_{1j}^0 \cdot \cos \varphi_j + \dot{\gamma}_{3j} \cdot \alpha_{2j}^0 \cos \varphi_j + \right. \\ &\quad \left. - \dot{\varphi}_j \cdot \gamma_{3j} \cdot \alpha_{2j}^0 \sin \varphi_j + \dot{\theta}_j \cdot \alpha_{3j}^0 \cdot \cos \theta_j \right] \end{aligned} \quad (5.65)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31j}}{\partial \varphi_j} \right) = \frac{d}{dt} [\beta_{3j} \cdot \alpha_{1j}^0 - \alpha_{2j} \cdot \alpha_{3j}^0] = [\dot{\beta}_{3j} \cdot \alpha_{1j}^0 - \dot{\alpha}_{2j} \cdot \alpha_{3j}^0] \quad (5.66)$$

### 5.4.1. A gömbcsukló

A gömbcsukló gyorsulásainak kényszer egyenleteit az (5.29) rendszer idő függvényében való deriválása után kapjuk, amelyek:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{Gi} - \ddot{\psi}_i(x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i}) + \ddot{\theta}_i(x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \sin \psi_i + \\ + \ddot{\varphi}_i(x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i}) - \dot{\psi}_i(x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{2i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{2i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{2i}) + \\ + \dot{\theta}_i(x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i}) \sin \psi_i + \dot{\varphi}_i(x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i}) + \\ + \dot{\theta}_i \cdot \dot{\psi}_i(x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \cos \psi_i - \ddot{X}_{Gj} + \\ + \ddot{\psi}_j(x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j}) - \\ - \ddot{\theta}_j(x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \sin \psi_j - \ddot{\varphi}_j(x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j}) + \\ + \dot{\psi}_j(x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{2j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{2j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{2j}) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{\theta}_j(x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j}) \sin \psi_j - \dot{\varphi}_j(x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j}) - \\
& -\dot{\theta}_j \cdot \dot{\psi}_j(x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \cos \psi_j = 0 \\
\ddot{Y}_{Gi} + \ddot{\psi}_i(x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i}) - \\
& -\ddot{\theta}_i(x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \cos \psi_i + \\
& + \ddot{\varphi}_i(x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i}) + \dot{\psi}_i(x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{1i}) - \\
& -\dot{\theta}_i(x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i}) \cos \psi_i + \dot{\varphi}_i(x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{2i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{2i}) + \\
& + \dot{\theta}_i \cdot \dot{\psi}_i(x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \sin \psi_i - \ddot{Y}_{Gj} - \\
& -\ddot{\psi}_j(x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) + \\
& + \ddot{\theta}_j(x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \cos \psi_j - \ddot{\varphi}_j(x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j}) - \\
& -\dot{\psi}_j(x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{1j}) + \\
& + \dot{\theta}_j(x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j}) \cos \psi_j - \dot{\varphi}_j(x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{2j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{2j}) - \\
& -\dot{\theta}_j \cdot \dot{\psi}_j(x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \sin \psi_j = 0 \\
\ddot{Z}_{Gi} + \ddot{\theta}_i(x_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \varphi_i + y_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \varphi_i - z_{ij} \cdot \sin \theta_i) + \\
& + \ddot{\varphi}_i(x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i}) + \\
& + \dot{\theta}_i(x_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i} \cdot \sin \varphi_i + y_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i} \cdot \cos \varphi_i - z_{ij} \cdot \dot{\theta}_i \cos \theta_i) + \\
& + \dot{\theta}_i \cdot \dot{\varphi}_i(x_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \varphi_i - y_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \varphi_i) + \dot{\varphi}_i(x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i}) - \\
& -\ddot{Z}_{Gj} - \ddot{\theta}_j(x_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \sin \varphi_j + y_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \cos \varphi_j - z_{ji} \cdot \sin \theta_j) - \\
& -\ddot{\varphi}_j(x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j}) - \\
& -\dot{\theta}_j(x_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j} \cdot \sin \varphi_j + y_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j} \cdot \cos \varphi_j - z_{ji} \cdot \dot{\theta}_j \sin \theta_j) - \\
& -\dot{\theta}_j \dot{\varphi}_j(x_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \cos \varphi_j - y_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \sin \varphi_j) - \dot{\varphi}_j(x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j}) = 0
\end{aligned} \tag{5.67}$$

#### 5.4.2. Egytetemes csukló (kardánkereszt vagy csapos gömbcsukló)

A gyorsulásokat meghatározó kényszer egyenletek az (5.67) egyenletrendszerből (ahol ismert, hogy  $\ddot{\mathbf{a}} = 0$ ) és az (5.31), feltételek deriválásából kapott egyenletből tevődik össze, azaz:

$$\begin{aligned}
& \ddot{b}_{13i} b_{11j} + 2\dot{b}_{13i} \dot{b}_{11j} + b_{13i} \ddot{b}_{11j} + \ddot{b}_{23i} b_{21j} + 2\dot{b}_{23i} \dot{b}_{21j} + b_{23i} \ddot{b}_{21j} + \ddot{b}_{33i} b_{31j} + \\
& + 2\dot{b}_{33i} \dot{b}_{31j} + b_{33i} \ddot{b}_{31j} = 0
\end{aligned} \tag{5.68}$$

A változók szétválasztása és csoportosítása után, az (5.45), (5.49), (5.53), (5.56), (5.60) és az (5.64) egyenletek segítségével felírjuk az (5.68) egyenlet általános alakját:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \ddot{\psi}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} + \ddot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} + \ddot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} + \dot{\psi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \dot{\theta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} \right) \right] \cdot b_{11j} + \\
 & + \left[ \ddot{\psi}_i \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \psi_i} + \ddot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \theta_i} + \ddot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \varphi_i} + \dot{\psi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \psi_i} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \dot{\theta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \varphi_i} \right) \right] \cdot b_{21j} + \\
 & + \left[ \ddot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} + \ddot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} + \dot{\theta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} \right) \right] \cdot b_{31j} + \\
 & + \left[ \ddot{\psi}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \psi_j} + \ddot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \theta_j} + \ddot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \varphi_j} + \dot{\psi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11j}}{\partial \psi_j} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \dot{\theta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11j}}{\partial \theta_j} \right) + \dot{\varphi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{11j}}{\partial \varphi_j} \right) \right] \cdot b_{13i} + \\
 & + \left[ \ddot{\psi}_j \cdot \frac{\partial b_{21j}}{\partial \psi_j} + \ddot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{21j}}{\partial \theta_j} + \ddot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{21j}}{\partial \varphi_j} + \dot{\psi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21j}}{\partial \psi_j} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \dot{\theta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21j}}{\partial \theta_j} \right) + \dot{\varphi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{21j}}{\partial \varphi_j} \right) \right] \cdot b_{23i} + \\
 & + \left[ \ddot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \theta_j} + \ddot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \varphi_j} + \dot{\theta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31j}}{\partial \theta_j} \right) + \dot{\varphi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31j}}{\partial \varphi_j} \right) \right] \cdot b_{33i} + \\
 & + 2 \cdot \left[ \dot{\psi}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} + \dot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} \right] \cdot \left[ \dot{\psi}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \psi_j} + \dot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \theta_j} + \dot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{11j}}{\partial \varphi_j} \right] + \\
 & + 2 \cdot \left[ \dot{\psi}_i \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \psi_i} + \dot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \theta_i} + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \varphi_i} \right] \cdot \left[ \dot{\psi}_j \cdot \frac{\partial b_{21j}}{\partial \psi_j} + \dot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{21j}}{\partial \theta_j} + \dot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{21j}}{\partial \varphi_j} \right] + \\
 & + 2 \cdot \left[ \dot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} \right] \cdot \left[ \dot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \theta_j} + \dot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \varphi_j} \right] = 0 \tag{5.69}
 \end{aligned}$$

Az (5.69) egyenletben csak az Euler-szögek második deriváltjai ismeretlenek. Tehát amint az egyenletből is kitűnik, a tagok könnyen újracsoportosíthatók az ismeretlenek szerint, és az egyenlet kifejezett alakban is írható. A parciális deriváltak pedig előre meghatározott, ismert értékű függvényekből tevődnek össze.

### 5.4.3. A hengeres csukló

A hengeres csuklóval kapcsolt tagok gyorsulásait meghatározó rendszer első három kényszer egyenletét az (5.43) mátrixegyenletből fejezzük ki, amelybe behe-

lyettesítjük az (5.44) és az (5.45) egyenlőségeket. Az így kapott rendszerhez hozzárendeljük az (5.70) feltételeket.

$$\begin{aligned} \ddot{b}_{13i} &= \ddot{b}_{13j} \\ \ddot{b}_{33i} &= \ddot{b}_{33j} \end{aligned} \tag{5.70}$$

Az (5.45), (5.46), ..., (5.55) egyenletek figyelembevételével és csoportosítása után a hengeres csuklóval kapcsolt kinematikai pár gyorsulását meghatározó egyenletrendszer a következő alakban foglalható össze:

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{Gi} - \ddot{\psi}_i &\left( x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i} - a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} \right) + \\ &+ \ddot{\theta}_i \left[ (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \sin \psi_i + a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} \right] + \\ &+ \ddot{\varphi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} \right) - \dot{\psi}_i (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{2i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{2i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{2i}) + \\ &+ \dot{\theta}_i (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i}) \sin \psi_i + \dot{\varphi}_i (x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i}) + \\ &+ \dot{\theta}_i \cdot \dot{\psi}_i (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \cos \psi_i + \ddot{a} \cdot b_{13i} + 2 \cdot \dot{a} \cdot \dot{b}_{13i} + \\ &+ a \cdot \left[ \dot{\psi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} \right) + \dot{\theta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} \right) \right] - \ddot{X}_{Gj} + \\ &+ \ddot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j}) - \\ &- \ddot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \sin \psi_j - \ddot{\varphi}_j (x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j}) + \\ &+ \dot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{2j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{2j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{2j}) - \\ &- \dot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j}) \sin \psi_j - \dot{\varphi}_j (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j}) - \\ &- \dot{\theta}_j \cdot \dot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \cos \psi_j = 0 \\ \ddot{Y}_{Gi} + \ddot{\psi}_i &\left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \psi_i} \right) - \\ &- \ddot{\theta}_i \left( (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \cos \psi_i - a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \theta_i} \right) + \\ &+ \ddot{\varphi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \varphi_i} \right) + \dot{\psi}_i (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{1i}) - \\ &- \dot{\theta}_i (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i}) \cos \psi_i + \dot{\varphi}_i (x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{2i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{2i}) + \\ &+ \dot{\theta}_i \cdot \dot{\psi}_i (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \sin \psi_i + \ddot{a} \cdot b_{23i} + 2 \cdot \dot{a} \cdot \dot{b}_{23i} + \\ &+ a \cdot \left[ \dot{\psi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \psi_i} \right) + \dot{\theta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \varphi_i} \right) \right] - \ddot{Y}_{Gj} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\ddot{\psi}_j(x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) + \\
& + \ddot{\theta}_j(x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \cos \psi_j - \ddot{\phi}_j(x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j}) - \\
& - \dot{\psi}_j(x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{1j}) + \\
& + \dot{\theta}_j(x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j}) \cos \psi_j - \dot{\phi}_j(x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{2j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{2j}) - \\
& - \dot{\theta}_j \cdot \dot{\psi}_j(x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \sin \psi_j = 0 \\
\ddot{Z}_{Gi} & + \ddot{\theta}_i(x_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \varphi_i + y_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \varphi_i - z_{ij} \cdot \sin \theta_i + a \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i}) + \\
& + \ddot{\phi}_i(x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i} + a \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i}) + \\
& + \dot{\theta}_i(x_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i} \cdot \sin \varphi_i + y_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i} \cdot \cos \varphi_i - z_{ij} \cdot \dot{\theta}_i \cos \theta_i) + \\
& + \dot{\theta}_i \cdot \dot{\phi}_i(x_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \varphi_i - y_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \varphi_i) + \dot{\phi}_i(x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i}) + \\
& + \ddot{a} \cdot b_{33i} + 2 \cdot \dot{a} \cdot \dot{b}_{33i} + a \cdot \left[ \dot{\theta} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{\phi} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} \right) \right] - \ddot{Z}_{Gj} - \\
& - \ddot{\theta}_j(x_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \sin \varphi_j + y_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \cos \varphi_j - z_{ji} \cdot \sin \theta_j) - \\
& - \ddot{\phi}_j(x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j}) - \\
& - \dot{\theta}_j(x_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j} \cdot \sin \varphi_j + y_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j} \cdot \cos \varphi_j - z_{ji} \cdot \dot{\theta}_j \sin \theta_j) - \\
& - \dot{\theta}_j \dot{\phi}_j(x_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \cos \varphi_j - y_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \sin \varphi_j) - \dot{\phi}_j(x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j}) = 0 \\
\ddot{\psi}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} & + \ddot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} + \ddot{\phi}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} + \dot{\psi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} \right) + \dot{\theta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{\phi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} \right) - \\
& - \left[ \ddot{\psi}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \psi_j} + \ddot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \theta_j} + \ddot{\phi}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \varphi_j} + \dot{\psi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13j}}{\partial \psi_j} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \dot{\theta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13j}}{\partial \theta_j} \right) + \dot{\phi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13j}}{\partial \varphi_j} \right) \right] = 0 \\
\ddot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} & + \ddot{\phi}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} + \dot{\theta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{\phi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} \right) - \\
& - \left[ \ddot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \theta_j} + \ddot{\phi}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \varphi_j} + \dot{\theta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33j}}{\partial \theta_j} \right) + \dot{\phi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33j}}{\partial \varphi_j} \right) \right] = 0 \tag{5.71}
\end{aligned}$$

#### 5.4.4. A csúszka (keresztfej)

A csúszkával kapcsolt tagok gyorsulásai meghatározásához szükséges egyenletrendszer megegyezik a hengeres csuklóéval, amelyhez hozzárendeljük az (5.72) feltételt.

$$\ddot{\phi}_i^* = \ddot{\phi}_j^* \text{ vagy } \ddot{b}_{31i} = \ddot{b}_{31j} \tag{5.72}$$



amely az (5.64) egyenlőséggel kifejezve, a következő rendszer hatodik egyenletét alkotja:

$$\begin{aligned}
& \ddot{X}_{Gi} - \ddot{\psi}_i \left( x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i} - a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} \right) + \\
& \quad + \ddot{\theta}_i \left[ (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \sin \psi_i + a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} \right] + \\
& \quad + \ddot{\varphi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} \right) - \dot{\psi}_i (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{2i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{2i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{2i}) + \\
& \quad + \dot{\theta}_i (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i}) \sin \psi_i + \dot{\varphi}_i (x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i}) + \\
& \quad + \dot{\theta}_i \cdot \dot{\psi}_i (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \cos \psi_i + \ddot{a} \cdot b_{13i} + 2 \cdot \dot{a} \cdot \dot{b}_{13i} + \\
& \quad + a \cdot \left[ \dot{\psi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} \right) + \dot{\theta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} \right) \right] - \ddot{X}_{Gj} + \\
& \quad + \ddot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j}) - \\
& \quad - \ddot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \sin \psi_j - \ddot{\varphi}_j (x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j}) + \\
& \quad + \dot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{2j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{2j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{2j}) - \\
& \quad - \dot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j}) \sin \psi_j - \dot{\varphi}_j (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j}) - \\
& \quad - \dot{\theta}_j \cdot \dot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \cos \psi_j = 0 \\
& \ddot{Y}_{Gi} + \ddot{\psi}_i \left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \psi_i} \right) - \\
& \quad - \ddot{\theta}_i \left( (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \cos \psi_i - a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \theta_i} \right) + \\
& \quad + \ddot{\varphi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \varphi_i} \right) + \dot{\psi}_i (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{1i}) - \\
& \quad - \dot{\theta}_i (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i}) \cos \psi_i + \dot{\varphi}_i (x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{2i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{2i}) + \\
& \quad + \dot{\theta}_i \cdot \dot{\psi}_i (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \sin \psi_i + \ddot{a} \cdot b_{23i} + 2 \cdot \dot{a} \cdot \dot{b}_{23i} + \\
& \quad + a \cdot \left[ \dot{\psi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \psi_i} \right) + \dot{\theta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \varphi_i} \right) \right] - \ddot{Y}_{Gj} - \\
& \quad - \ddot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) + \\
& \quad + \ddot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \cos \psi_j - \ddot{\varphi}_j (x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j}) - \\
& \quad - \dot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{1j}) + \\
& \quad + \dot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j}) \cos \psi_j - \dot{\varphi}_j (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{2j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{2j}) - \\
& \quad - \dot{\theta}_j \cdot \dot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \sin \psi_j = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \ddot{Z}_{Gi} + \ddot{\theta}_i \left( x_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \varphi_i + y_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \varphi_i - z_{ij} \cdot \sin \theta_i + a \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} \right) + \\
 & + \ddot{\varphi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i} + a \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} \right) + \\
 & + \dot{\theta}_i \left( x_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i} \cdot \sin \varphi_i + y_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i} \cdot \cos \varphi_i - z_{ij} \cdot \dot{\theta}_i \cos \theta_i \right) + \\
 & + \dot{\theta}_i \cdot \dot{\varphi}_i \left( x_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \varphi_i - y_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \varphi_i \right) + \dot{\varphi}_i \left( x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i} \right) + \\
 & + \ddot{a} \cdot b_{33i} + 2 \cdot \dot{a} \cdot \dot{b}_{33i} + a \cdot \left[ \dot{\theta} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{\varphi} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} \right) \right] - \ddot{Z}_{Gj} - \\
 & - \ddot{\theta}_j \left( x_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \sin \varphi_j + y_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \cos \varphi_j - z_{ji} \cdot \sin \theta_j \right) - \\
 & - \ddot{\varphi}_j \left( x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j} \right) - \\
 & - \dot{\theta}_j \left( x_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j} \cdot \sin \varphi_j + y_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j} \cdot \cos \varphi_j - z_{ji} \cdot \dot{\theta}_j \sin \theta_j \right) - \\
 & - \dot{\theta}_j \dot{\varphi}_j \left( x_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \cos \varphi_j - y_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \sin \varphi_j \right) - \dot{\varphi}_j \left( x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j} \right) = 0 \\
 & \ddot{\psi}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} + \ddot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} + \ddot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} + \ddot{\psi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} \right) + \dot{\theta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} \right) - \\
 & - \left[ \ddot{\psi}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \psi_j} + \ddot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \theta_j} + \ddot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \varphi_j} + \ddot{\psi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13j}}{\partial \psi_j} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \dot{\theta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13j}}{\partial \theta_j} \right) + \dot{\varphi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13j}}{\partial \varphi_j} \right) \right] = 0 \\
 & \ddot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} + \ddot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} + \dot{\theta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} \right) - \\
 & - \left[ \ddot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \theta_j} + \ddot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \varphi_j} + \dot{\theta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33j}}{\partial \theta_j} \right) + \dot{\varphi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33j}}{\partial \varphi_j} \right) \right] = 0 \\
 & \ddot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \theta_i} + \ddot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{31i}}{\partial \varphi_i} + \dot{\theta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \theta_j} \right) + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31i}}{\partial \varphi_i} \right) - \ddot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \theta_j} + \ddot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{31j}}{\partial \varphi_j} + \\
 & + \dot{\theta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31j}}{\partial \theta_j} \right) + \dot{\varphi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{31j}}{\partial \varphi_j} \right) = 0 \tag{5.73}
 \end{aligned}$$

### 5.4.5. A forgó csukló

A forgó csuklóval kapcsolt tagok gyorsulásait meghatározó rendszert az (5.45) sebességeket meghatározó egyenletek idő függvényében való deriválása után kapjuk, vagy az (5.71) hengeres csukló egyenletrendszerében az  $\mathbf{a}$  paramétert állandónak tekintjük, azaz:

$$\ddot{X}_{Gi} - \ddot{\psi}_i \left( x_{ij} \cdot \alpha_{2i} + y_{ij} \cdot \beta_{2i} + z_{ij} \cdot \gamma_{2i} - a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& +\ddot{\theta}_i \left[ (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \sin \psi_i + a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} \right] + \\
& +\ddot{\varphi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{1i} - y_{ij} \cdot \alpha_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} \right) - \dot{\psi}_i (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{2i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{2i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{2i}) + \\
& +\dot{\theta}_i (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i}) \sin \psi_i + \dot{\varphi}_i (x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i}) + \\
& +\dot{\theta}_i \cdot \dot{\psi}_i (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \cos \psi_i + \\
& +a \cdot \left[ \dot{\psi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} \right) + \dot{\theta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} \right) \right] - \ddot{X}_{Gj} + \\
& +\ddot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{2j} + y_{ji} \cdot \beta_{2j} + z_{ji} \cdot \gamma_{2j}) - \\
& -\ddot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \sin \psi_j - \ddot{\varphi}_j (x_{ji} \cdot \beta_{1j} - y_{ji} \cdot \alpha_{1j}) + \\
& +\dot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{2j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{2j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{2j}) - \\
& -\dot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j}) \sin \psi_j - \dot{\varphi}_j (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j}) - \\
& -\dot{\theta}_j \cdot \dot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \cos \psi_j = 0 \\
\ddot{Y}_{Gi} + \ddot{\psi}_i \left( x_{ij} \cdot \alpha_{1i} + y_{ij} \cdot \beta_{1i} + z_{ij} \cdot \gamma_{1i} + a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \psi_i} \right) - \\
& -\ddot{\theta}_i \left( (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \cos \psi_i - a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \theta_i} \right) + \\
& +\ddot{\varphi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{2i} - y_{ij} \cdot \alpha_{2i} + a \cdot \frac{\partial b_{23i}}{\partial \varphi_i} \right) + \dot{\psi}_i (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{1i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{1i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{1i}) - \\
& -\dot{\theta}_i (x_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i} + y_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} + z_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i}) \cos \psi_i + \dot{\varphi}_i (x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{2i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{2i}) + \\
& +\dot{\theta}_i \cdot \dot{\psi}_i (x_{ij} \cdot \alpha_{3i} + y_{ij} \cdot \beta_{3i} + z_{ij} \cdot \gamma_{3i}) \sin \psi_i + \\
& +a \cdot \left[ \dot{\psi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \psi_i} \right) + \dot{\theta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{23i}}{\partial \varphi_i} \right) \right] - \ddot{Y}_{Gj} - \\
& -\ddot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{1j} + y_{ji} \cdot \beta_{1j} + z_{ji} \cdot \gamma_{1j}) + \\
& +\ddot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \cos \psi_j - \ddot{\varphi}_j (x_{ji} \cdot \beta_{2j} - y_{ji} \cdot \alpha_{2j}) - \\
& -\dot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{1j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{1j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{1j}) + \\
& +\dot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j} + y_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} + z_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j}) \cos \psi_j - \dot{\varphi}_j (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{2j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{2j}) - \\
& -\dot{\theta}_j \cdot \dot{\psi}_j (x_{ji} \cdot \alpha_{3j} + y_{ji} \cdot \beta_{3j} + z_{ji} \cdot \gamma_{3j}) \sin \psi_j = 0 \\
\ddot{Z}_{Gi} + \ddot{\theta}_i \left( x_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \varphi_i + y_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \varphi_i - z_{ij} \cdot \sin \theta_i + a \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} \right) + \\
& +\ddot{\varphi}_i \left( x_{ij} \cdot \beta_{3i} - y_{ij} \cdot \alpha_{3i} + a \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} \right) + \\
& +\dot{\theta}_i (x_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i} \cdot \sin \varphi_i + y_{ij} \cdot \dot{\gamma}_{3i} \cdot \cos \varphi_i - z_{ij} \cdot \dot{\theta}_i \cos \theta_i) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\dot{\theta}_i \cdot \dot{\varphi}_i (x_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \cos \varphi_i - y_{ij} \cdot \gamma_{3i} \cdot \sin \varphi_i) + \dot{\varphi}_i (x_{ij} \cdot \dot{\beta}_{3i} - y_{ij} \cdot \dot{\alpha}_{3i}) + \\
 & + a \cdot \left[ \dot{\theta} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{\varphi} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} \right) \right] - \dot{Z}_{Gj} - \\
 & - \ddot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \sin \varphi_j + y_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \cos \varphi_j - z_{ji} \cdot \sin \theta_j) - \\
 & - \ddot{\varphi}_j (x_{ji} \cdot \beta_{3j} - y_{ji} \cdot \alpha_{3j}) - \\
 & - \dot{\theta}_j (x_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j} \cdot \sin \varphi_j + y_{ji} \cdot \dot{\gamma}_{3j} \cdot \cos \varphi_j - z_{ji} \cdot \dot{\theta}_j \sin \theta_j) - \\
 & - \dot{\theta}_j \dot{\varphi}_j (x_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \cos \varphi_j - y_{ji} \cdot \gamma_{3j} \cdot \sin \varphi_j) - \dot{\varphi}_j (x_{ji} \cdot \dot{\beta}_{3j} - y_{ji} \cdot \dot{\alpha}_{3j}) = 0 \\
 & \ddot{\psi}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} + \ddot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} + \ddot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} + \dot{\psi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \psi_i} \right) + \dot{\theta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13i}}{\partial \varphi_i} \right) - \\
 & - \left[ \ddot{\psi}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \psi_j} + \ddot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \theta_j} + \ddot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{13j}}{\partial \varphi_j} + \dot{\psi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13j}}{\partial \psi_j} \right) + \dot{\theta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13j}}{\partial \theta_j} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \dot{\varphi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{13j}}{\partial \varphi_j} \right) \right] = 0 \\
 & \ddot{\theta}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} + \ddot{\varphi}_i \cdot \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} + \dot{\theta}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \theta_i} \right) + \dot{\varphi}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33i}}{\partial \varphi_i} \right) - \\
 & - \left[ \ddot{\theta}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \theta_j} + \ddot{\varphi}_j \cdot \frac{\partial b_{33j}}{\partial \varphi_j} + \dot{\theta}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33j}}{\partial \theta_j} \right) + \dot{\varphi}_j \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial b_{33j}}{\partial \varphi_j} \right) \right] = 0 \tag{5.74}
 \end{aligned}$$

### 5.4.6. A menetes csukló

A menetes csuklóval kapcsolt tagok gyorsulását meghatározó rendszer a hengeres csuklóval kapcsolt tagok gyorsulását meghatározó egyenletrendszer sajátos eseteként kezelhető. A gyorsulásokat meghatározó egyenletrendszer alapegyenletei tehát az (5.71) egyenletekből állnak, amelyhez hozzárendeljük az (5.75) feltételeket, azaz:

$$\begin{aligned}
 \check{\zeta} &= \check{\varphi}_i^* - \check{\varphi}_j^* \\
 \check{a} &= \frac{p}{2\pi} \cdot (\check{\varphi}_i^* - \check{\varphi}_j^*) \tag{5.75}
 \end{aligned}$$

A  $\check{\varphi}_i^*$  az (5.41), (5.42) és az (5.43) egyenletek deriválása után, kifejtett alakban az alábbi módon írható fel:

$$\check{\varphi}_i^* = \frac{\dot{b}_{31i} b_{32i} - \dot{b}_{31i} \dot{b}_{32i}}{b_{32i}^2} + \frac{\dot{b}_{33i} b_{33i} + \dot{b}_{33i}^2}{b_{32i} \sin \theta_i^*} - \dot{b}_{33i} b_{33i} \frac{\dot{b}_{32i} \sin \theta_i^* + b_{32i} \dot{\theta}_i^* b_{33i}}{b_{32i}^2 \sin^2 \theta_i^*} \tag{5.76}$$

A  $\ddot{\varphi}_j^*$  kifejezés az (5.76)-tal formálisan azonos, azzal a különbséggel, hogy az „i” indexet a „j” indexszel helyettesítjük.

A fenti jelölésekkel a menetes csuklóval kapcsolt tagok gyorsulását meghatározó rendszer ötödik egyenletéhez jutunk.

$$\ddot{a} = \frac{p}{2\pi} \left( \begin{array}{l} \frac{\ddot{b}_{31i}b_{32i} - \dot{b}_{31i}\dot{b}_{32i}}{b_{32i}^2} + \frac{\ddot{b}_{33i}b_{33i} + \dot{b}_{33i}^2}{b_{32i} \sin \theta_i^*} - \dot{b}_{33i}b_{33i} \frac{\dot{b}_{32i} \sin \theta_i^* + b_{32i}\dot{\theta}_i^* b_{33i}}{b_{32i}^2 \sin^2 \theta_i^*} - \\ - \frac{\ddot{b}_{31j}b_{32j} - \dot{b}_{31j}\dot{b}_{32j}}{b_{32i}^2} + \frac{\ddot{b}_{33j}b_{33j} + \dot{b}_{33j}^2}{b_{32i} \sin \theta_i^*} - \dot{b}_{33j}b_{33j} \frac{\dot{b}_{32j} \sin \theta_j^* + b_{32j}\dot{\theta}_j^* b_{33j}}{b_{32j}^2 \sin^2 \theta_j^*} \end{array} \right) \quad (5.77)$$

*Megjegyzés:*

A gépekben működő mechanizmusok tengelyei általában jól meghatározott irányú csapágyházakban helyezkednek el. Ezekben az esetekben a hengeres, forgó vagy menetes csuklóval kapcsolt kinematikai párok geometriai rendszereinek iránytényezői állandók, tehát a deriváltjaik értéke nulla, így ezekben az esetekben a tagok sebességét és gyorsulását meghatározó kényszer egyenletek feltételei kiesnek a rendszerből. A tengelyek egymásra helyezésekor, a hengeres, forgó, csúszka és menetes csuklóval kapcsolt kinematikai párok sebességeit és gyorsulásait meghatározó rendszereiben a pozíciók meghatározására bemutatott, az esetnek megfelelő módosításokat kell kieszközölni.

## 6. A TÉRMECHANIZMUSOK DINAMIKAI KIEGYENSÚLYOZÁSA ÉS OPTIMIZÁLÁSA

### 6.1. A teljes kiegyensúlyozás

E. N. Stevensen Jr. [51] tudományos közleményében egy általánosan megfogalmazott módszert mutat be, amely szerint három egymásra kölcsönösen merőleges tengelyre helyezett hat ellensúllyal bármely mechanizmus kiegyensúlyozható, ha az ellensúlyokat tartó tengelyek azon a gép törzsének súlypontjába helyezett koordináta-rendszer tengelyeivel párhuzamosak, amely szerint a géptörzset terhelő hatóerőket és nyomatékokat meghatározták. Azokban a sajátos helyzetekben, amikor a három ellensúlytartó tengely valamelyike hiányzik, röviden bemutatja, hogyan lehet a géptörzs egyik pontjának rezgését minimálisra csökkenteni. A közleményben bemutatott módszer csak egyetlen csomópont rezgésének minimalizálását tárgyalja, viszont azt is igazolja, hogy a feltejt minimalizálás következtében a gép többi pontjának rezgésamplitúdói növekednek.

Annak ellenére, hogy a géptörzs összes pontjai rezgésamplitúdóinak minimalizálására nem ad megoldást, egyetlen a szakirodalomban eddig megjelent dinamikai kiegyensúlyozást elemző munkák közül, amely referenciapontként szolgál és továbbfejleszthető.

Az alábbiakban a dinamikus kiegyensúlyozást általános mechanikai modellen vizsgáljuk.

Az 6.1. ábrán felvett  $OXYZ$  koordináta-rendszer origója egybeesik a géptörzs súlypontjával. Az  $OX$  tengellyel párhuzamos kiegyensúlyozó tengely az  $(OYZ)$  síkot a  $(0, a_z, a_y)$  pontban dőfi át. Erre a kiegyensúlyozó tengelyre elhelyezett ellensúlyok  $OX$  tengely szerinti szabadon választott koordinátái  $x = a_1, x = a_2$ . Hasonlóképpen, az  $OY$  koordinátatengellyel párhuzamos kiegyensúlyozó tengely az  $(OXZ)$  síkot a  $(b_z, 0, b_x)$  pontban dőfi át, az ellensúlyok pedig ezen az  $y = b_1, y = b_2$   $y$ -koordinátájú pontokban lesznek elhelyezve. Végül, az  $OZ$  koordinátatengellyel párhuzamos kiegyensúlyozó tengely az  $(OXY)$  síkot a  $(c_y, c_x, 0)$

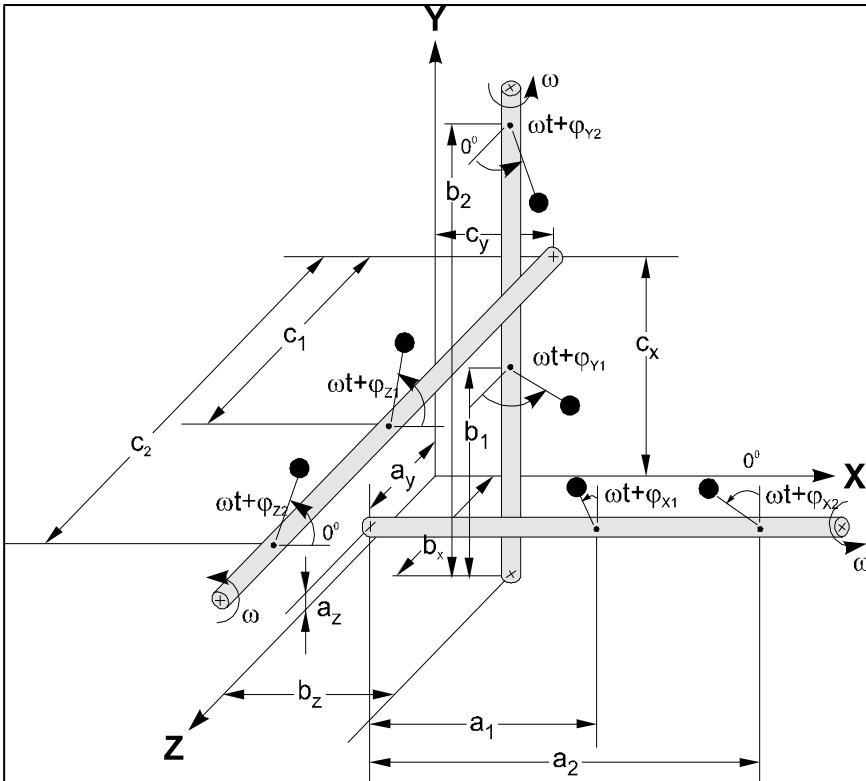
## 6. A TÉRMECHANIZMUSOK DINAMIKAI KIEGYENSÚLYOZÁSA ÉS OPTIMIZÁLÁSA

pontban dőli át, a tengelyre illesztett ellensúlyok helyzeteit a  $z = c_1, z = c_2$  z-koordináták jelölik ki.

Az excentrikus elhelyezésű kiegyensúlyozó tömegek által létrehozott centrifugális erők értékét az

$$F = mr\omega^2 \quad (6.1)$$

képlettel számítjuk, ahol  $m$  a kiegyensúlyozó tömeg,  $r$  pedig ennek tömegközéppontja és a forgástengely közötti távolsággal egyenlő.



6.1. ábra

A kiegyensúlyozó erők kettős indexei a tömegek hovatartozását és helyét mutatják, így az  $F_{x1}$  és  $F_{x2}$  az  $OX$  tengellyel párhuzamos, az  $F_{y1}$  és  $F_{y2}$  az  $OY$  tengellyel párhuzamos, míg az  $F_{z1}$  és  $F_{z2}$  erők az  $OZ$  tengellyel párhuzamos kiegyensúlyozó tengelyre szerelt tömegek által gerjesztett centrifugális erőket jelölik.

A továbbiakban szükség lesz arra, hogy az excentrikusan elhelyezett kiegyensúlyozó tag tömegközéppontját az álló, géptörzshöz kötött koordináta-rendszerhez viszonyítani tudjuk. Nevezzük a következőkben fázisszögnek azt a szöget, amelyet a kiegyensúlyozó tag tömegközéppontjából a kiegyensúlyozó tengelyre bocsátott merőleges zár be a két fennmaradt merőleges irányból azzal, amelyik a szög mérését az óramutató járásával ellentétes irányításban teszi lehetővé. Ezek szerint az  $X$  tengelyre szerelt kiegyensúlyozó tömeg fázisszögét az  $Y$  tengelyhez, az  $Y$  tengelyre szereltét a  $Z$ -hez, míg a  $Z$ -re szereltét az  $X$ -hez viszonyítva határozzuk meg.

Ahhoz, hogy a kiegyensúlyozást létrehozzuk a tömegek szabadon választott elhelyezésének függvényében, ki kell számítanunk minden kiegyensúlyozó tömeg fázisszögét és a kiegyensúlyozó tengelyhez viszonyított statikus nyomatékát az  $OXYZ$  géptörzshöz kötött koordináta-rendszerben.

A 6.1. ábrán szereplő kiegyensúlyozó tömegek pillanatnyi szöghelyzetét az  $\omega t + \phi$  kifejezéssel adhatjuk meg, ahol a  $\phi$  szög a fázisszög.

A továbbiakban a Fourier-sor első harmonikus tagja szerinti teljes kiegyensúlyozást tárgyaljuk. Az első harmonikus tag  $A \cos \omega t + B \sin \omega t$  alakban tartalmazza a kiegyensúlyozatlan erőket és nyomatékokat. Az  $A$  és  $B$  együtthatók irányokat, erőket és nyomatékokat megkülönböztető indexszel vannak ellátva.

A kinetostatikus elvnek (a D'Alembert-elvnek) megfelelően a lengést gerjesztő erők és nyomatékok vektorkettőse a kiegyensúlyozó tömegek által gerjesztett erők és nyomatékok vektorkettősének ellentétje kell legyen, azaz:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &= A_{FX} \cos \omega t + B_{FX} \sin \omega t + F_{Z1} \cos(\omega t + \varphi_{Z1}) + \\ &+ F_{Z2} \cos(\omega t + \varphi_{Z2}) + F_{Y1} \sin(\omega t + \varphi_{Y1}) + F_{Y2} \sin(\omega t + \varphi_{Y2}) \\ \sum F_y = 0 &= A_{FY} \cos \omega t + B_{FY} \sin \omega t + F_{X1} \cos(\omega t + \varphi_{X1}) + \\ &+ F_{X2} \cos(\omega t + \varphi_{X2}) + F_{Z1} \sin(\omega t + \varphi_{Z1}) + F_{Z2} \sin(\omega t + \varphi_{Z2}) \\ \sum F_z = 0 &= A_{FZ} \cos \omega \cdot t + B_{FZ} \sin \omega \cdot t + F_{X1} \sin(\omega \cdot t + \varphi_{X1}) + \\ &+ F_{X2} \sin(\omega \cdot t + \varphi_{X2}) + F_{Y1} \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Y1}) + F_{Y2} \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Y2}) \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\sum M_x = 0 = A_{MX} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{MX} \cdot \sin \omega \cdot t +$$



$$\begin{aligned}
& +b_1 \cdot F_{Y1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Y1}) + b_2 \cdot F_{Y2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Y2}) - \\
& -c_1 \cdot F_{Z1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Z1}) - c_2 \cdot F_{Z2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Z2}) - \\
& -a_y \cdot F_{X1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{X1}) - a_y \cdot F_{X2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{X2}) + \\
& +a_z \cdot F_{X1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{X1}) + a_z \cdot F_{X2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{X2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum M_y = 0 & = A_{MY} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{MY} \cdot \sin \omega \cdot t + \\
& +c_1 \cdot F_{Z1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Z1}) + c_2 \cdot F_{Z2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Z2}) - \\
& -a_1 \cdot F_{X1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{X1}) - a_2 \cdot F_{X2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{X2}) - \\
& -b_z \cdot F_{Y1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Y1}) - b_z \cdot F_{Y2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Y2}) + \\
& +b_x F_{Y1} \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Y1}) + b_x F_{Y2} \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Y2}) \\
\sum M_z = 0 & = A_{MZ} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{MZ} \cdot \sin \omega \cdot t + \\
& +a_1 \cdot F_{X1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{X1}) + a_2 \cdot F_{X2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{X2}) - \\
& -b_1 \cdot F_{Y1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Y1}) - b_2 \cdot F_{Y2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Y2}) + \\
& +c_y \cdot F_{Z1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Z1}) + c_y \cdot F_{Z2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Z2}) - \\
& -c_x \cdot F_{Z1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Z1}) - c_x \cdot F_{Z2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Z2}) \quad (6.3)
\end{aligned}$$

Vezessük be a képletek könnyebb érthetősége végett az alábbi jelöléseket:

$$\begin{aligned}
Q_1 & = F_{X1} \cdot \cos \varphi_{X1}; Q_2 = F_{X2} \cdot \cos \varphi_{X2} \\
R_1 & = F_{X1} \cdot \sin \varphi_{X1}; R_2 = F_{X2} \cdot \sin \varphi_{X2} \\
S_1 & = F_{Y1} \cdot \cos \varphi_{Y1}; S_2 = F_{Y2} \cdot \cos \varphi_{Y2} \\
T_1 & = F_{Y1} \cdot \sin \varphi_{Y1}; T_2 = F_{Y2} \cdot \sin \varphi_{Y2} \\
U_1 & = F_{Z1} \cdot \cos \varphi_{Z1}; U_2 = F_{Z2} \cdot \cos \varphi_{Z2} \\
V_1 & = F_{Z1} \cdot \sin \varphi_{Z1}; V_2 = F_{Z2} \cdot \sin \varphi_{Z2} \quad (6.4)
\end{aligned}$$

Ezekkel az (5.2) és (5.3) egyenletek a következő alakban írhatók fel:

$$\begin{aligned}
\sum F_x = 0 & = (A_{FX} + U_1 + U_2 + T_1 + T_2) \cdot \cos \omega t + \\
& + (B_{FX} - V_1 - V_2 + S_1 + S_2) \cdot \sin \omega t \\
\sum F_y = 0 & = (A_{FY} + Q_1 + Q_2 + V_1 + V_2) \cdot \cos \omega t + \\
& + (B_{FY} + U_1 + U_2 - R_1 - R_2) \cdot \sin \omega t \\
\sum F_z = 0 & = (A_{FZ} + S_1 + S_2 + R_1 + R_2) \cdot \cos \omega t + \\
& + (B_{FZ} + Q_1 + Q_2 - T_1 - T_2) \cdot \sin \omega t \\
\sum M_x = 0 & = \left( A_{MX} + b_1 \cdot S_1 + b_2 \cdot S_2 - c_1 \cdot V_1 - \right. \\
& \left. - c_2 \cdot V_2 - a_y \cdot Q_1 - a_y \cdot Q_2 + a_z \cdot R_1 + a_z \cdot R_2 \right) \cdot \cos \omega t +
\end{aligned}$$

6. A TÉRMECHANIZMUSOK DINAMIKAI KIEGYENSÚLYOZÁSA ÉS OPTIMIZÁLÁSA

$$\begin{aligned}
 & + \left( \begin{array}{c} B_{MX} - b_1 \cdot T_1 - b_2 \cdot T_2 - c_1 \cdot U_1 - \\ -c_2 \cdot U_2 + a_z \cdot Q_1 + a_z \cdot Q_2 + a_y \cdot R_1 + a_y \cdot R_2 \end{array} \right) \cdot \sin \omega t \\
 \Sigma M_y = 0 = & \left( \begin{array}{c} A_{MY} - a_1 \cdot R_1 - a_2 \cdot R_2 + c_1 \cdot U_1 + \\ -a_2 \cdot Q_2 + b_z \cdot T_1 + b_z \cdot T_2 + b_x \cdot S_1 + b_x \cdot S_2 \end{array} \right) \cdot \cos \omega t + \\
 & + \left( \begin{array}{c} B_{MY} - c_1 \cdot V_1 - c_2 \cdot V_2 - a_1 \cdot Q_1 - \\ +c_2 \cdot U_2 - b_z \cdot S_1 - b_z \cdot S_2 + b_x \cdot T_1 + b_x \cdot T_2 \end{array} \right) \cdot \sin \omega t \\
 \Sigma M_z = 0 = & \left( \begin{array}{c} A_{MZ} + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 - b_1 \cdot T_1 - b_2 \cdot T_2 + \\ +c_y \cdot V_1 + c_y \cdot V_2 - c_x \cdot U_1 - c_x \cdot U_2 \end{array} \right) \cdot \cos \omega t + \\
 & + \left( \begin{array}{c} B_{MZ} - a_1 \cdot R_1 - a_2 \cdot R_2 - b_1 \cdot S_1 - \\ -b_2 \cdot S_2 + c_y \cdot U_1 + c_y \cdot U_2 + c_x \cdot V_1 + c_x \cdot V_2 \end{array} \right) \cdot \sin \omega t
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Ahhoz, hogy a mechanizmus kiegyensúlyozását a teljes kinematikai ciklusra megvalósítsuk, a (6.5) egyenletnek a  $t$  időváltozó bármely értékére teljesülnie kell. Ez a feltétel csak akkor valósulhat meg, ha a rendszer minden egyenletében a  $\cos \omega t$  és a  $\sin \omega t$  együtthatóit egyenlővé tesszük nullával. Ezzel a feltétellel egy 12 egyenletből álló és 12 ismeretlenes lineáris egyenletrendszert kapunk, melynek mátrixalakja a következő:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -a_y & -a_y & a_z & a_z & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1 & -c_2 \\
 a_z & a_z & a_y & a_y & 0 & 0 & -b_1 & -b_2 & -c_1 & -c_2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -a_1 & -a_2 & -b_z & -b_z & b_x & b_x & c_1 & c_2 & 0 & 0 \\
 -a_1 & -a_2 & 0 & 0 & b_x & b_x & b_z & b_x & 0 & 0 & -c_1 & -c_2 \\
 a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & -b_2 & -c_x & -c_x & c_y & c_y \\
 0 & 0 & -a_1 & -a_2 & -b_1 & -b_2 & 0 & 0 & c_y & c_y & c_x & c_x
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ R_1 \\ R_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ T_1 \\ T_2 \\ U_1 \\ U_2 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{FX} \\ -B_{FX} \\ -A_{FY} \\ -B_{FY} \\ -A_{FZ} \\ -B_{FZ} \\ -A_{MX} \\ -B_{MX} \\ -A_{MY} \\ -B_{MY} \\ -A_{MZ} \\ -B_{MZ} \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

Az (6.6) egyenletrendszer megoldása után, az (6.4) képletekből fejezzük ki a kiegyensúlyozó erők abszolút értékeit:

$$\begin{aligned}
F_{X1} &= \sqrt{Q_1^2 + R_1^2} = (mr)_{X1} \cdot \omega^2 \\
F_{X2} &= \sqrt{Q_2^2 + R_2^2} = (mr)_{X2} \cdot \omega^2 \\
F_{Y1} &= \sqrt{S_1^2 + T_1^2} = (mr)_{Y1} \cdot \omega^2 \\
F_{Y2} &= \sqrt{S_2^2 + T_2^2} = (mr)_{Y2} \cdot \omega^2 \\
F_{Z1} &= \sqrt{U_1^2 + V_1^2} = (mr)_{Z1} \cdot \omega^2 \\
F_{Z2} &= \sqrt{U_2^2 + V_2^2} = (mr)_{Z2} \cdot \omega^2
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Ugyancsak a (6.4) egyenletekből számítjuk ki a kiegyensúlyozó erők fázisszögeit is, azaz:

$$\begin{aligned}
\varphi_{X1} &= \operatorname{arctg}\left(\frac{R_1}{Q_1}\right) \quad \varphi_{X2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{R_2}{Q_2}\right) \\
\varphi_{Y1} &= \operatorname{arctg}\left(\frac{T_1}{S_1}\right) \quad \varphi_{Y2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{T_2}{S_2}\right) \\
\varphi_{Z1} &= \operatorname{arctg}\left(\frac{V_1}{U_1}\right) \quad \varphi_{Z2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{V_2}{U_2}\right)
\end{aligned} \tag{6.8}$$

A (6.8) egyenletekben lényeges a számláló és a nevező előjelének megtartása, mivel a fázisszöget előjelesen kell számítanunk. (Pozitív az előjel, ha a szöget az óramutató járásával ellentétesen mérjük.)

## 6.2. Optimális kiegyensúlyozás a géptörzsre ható tehetetlenségi erők és a tehetetlenségi erők nyomatékainak minimálisra való csökkentésével

Abban az esetben, ha a kiegyensúlyozás csak részleges lehet, a kiegyensúlyozatlanul maradt erők és nyomatékok változó abszolút értékei zajt és az egész rendszerben rezgést okoznak. Az optimalizálás célja a gép törzsére ható kiegyensúlyozatlan erők és nyomatékok minimálisra való csökkentése. A módszer alkalmazásával a kiegyensúlyozatlan erők és nyomatékok abszolút értékei, a teljes kinematikai ciklusra számítva, minimálisra csökkennek.

A kiegyensúlyozatlanul maradt erőket és nyomatékokat jelöljük  $\sum F_x, \dots, \sum F_z$ , illetve  $\sum M_x, \dots, \sum M_z$ -vel, amelyek a géptörzs súlypontjára számított tehetetlenségi erőkből és a tehetetlenségi erők nyomatékaiból,

a kiegyensúlyozó erőkből és ezek nyomatékaiból tevődnek össze. A (6.9) egyenletrendszerben a rezgést okozó tehetetlenségi erők és a tehetetlenségi erők nyomatékai a Fourier-sor első harmonikusaként vannak jelen:

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_x &= A_{\Sigma F_x} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{\Sigma F_x} \cdot \sin \omega \cdot t \\
 \Sigma F_y &= A_{\Sigma F_y} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{\Sigma F_y} \cdot \sin \omega \cdot t \\
 \Sigma F_z &= A_{\Sigma F_z} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{\Sigma F_z} \cdot \sin \omega \cdot t \\
 \Sigma M_x &= A_{\Sigma M_x} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{\Sigma M_x} \cdot \sin \omega \cdot t \\
 \Sigma M_y &= A_{\Sigma M_y} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{\Sigma M_y} \cdot \sin \omega \cdot t \\
 \Sigma M_z &= A_{\Sigma M_z} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{\Sigma M_z} \cdot \sin \omega \cdot t
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

A (6.9) egyenletrendszerben használt „A” és „B” jelölések formálisan megegyeznek a (6.5) egyenlet zárójelbe foglalt együtthatóival, megjegyezve, hogy a zárójel tagjai a tehetetlenségi erők, a tehetetlenségi erők nyomatékainak együtthatói, mint  $A_{FX}$ ;  $B_{FX}$ ; vagy  $A_{MX}$ ;  $B_{MX}$ , illetve a kiegyensúlyozó tengelyekre helyezett ellensúlyok által bevitt kiegyensúlyozó erők és nyomatékok együtthatóiból tevődik össze.

Összehasonlítva a (6.5) és (6.9) egyenlőségeket felírható a két egyenlet Fourier-együtthatói között az egyenlőség:

$$\begin{aligned}
 A_{\Sigma F_x} &= A_{FX} + U_1 + U_2 + T_1 + T_2 \\
 B_{\Sigma F_x} &= B_{FX} - V_1 - V_2 + S_1 + S_2 \\
 A_{\Sigma F_y} &= A_{FY} + Q_1 + Q_2 + V_1 + V_2 \\
 B_{\Sigma F_y} &= B_{FY} + U_1 + U_2 - R_1 - R_2 \\
 A_{\Sigma F_z} &= A_{FZ} + S_1 + S_2 + R_1 + R_2 \\
 B_{\Sigma F_z} &= B_{FZ} + Q_1 + Q_2 - T_1 - T_2 \\
 A_{\Sigma M_x} &= A_{MX} + b_1 \cdot S_1 + b_2 \cdot S_2 - c_1 \cdot V_1 - c_2 \cdot V_2 - a_y \cdot (Q_1 + Q_2) + \\
 &\quad + a_z \cdot (R_1 + R_2) \\
 B_{\Sigma M_x} &= B_{MX} - b_1 \cdot T_1 - b_2 \cdot T_2 - c_1 \cdot U_1 - c_2 \cdot U_2 + a_z \cdot (Q_1 + Q_2) + \\
 &\quad + a_y \cdot (R_1 + R_2)
 \end{aligned}$$

## 6. A TÉRMECHANIZMUSOK DINAMIKAI KIEGYENSÚLYOZÁSA ÉS OPTIMIZÁLÁSA

$$\begin{aligned}
A_{\Sigma My} &= A_{My} - a_1 \cdot R_1 - a_2 \cdot R_2 + c_1 \cdot U_1 + c_2 \cdot U_2 - b_z \cdot (S_1 + S_2) + \\
&\quad + b_x \cdot (T_1 + T_2) \\
B_{\Sigma My} &= B_{My} - c_1 \cdot V_1 - c_2 \cdot V_2 - a_1 \cdot Q_1 - a_2 \cdot Q_2 + b_z \cdot (T_1 + T_2) + \\
&\quad + b_x \cdot (S_1 + S_2) \\
A_{\Sigma Mz} &= A_{Mz} + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 - b_1 \cdot T_1 - b_2 \cdot T_2 + c_y \cdot (V_1 + V_2) \mp \\
&\quad - c_x \cdot (U_1 + U_2) \\
B_{\Sigma Mz} &= B_{Mz} - a_1 \cdot R_1 - a_2 \cdot R_2 - b_1 \cdot S_1 - b_2 \cdot S_2 + c_y \cdot (U_1 + U_2) + \\
&\quad + c_x \cdot (V_1 + V_2)
\end{aligned} \tag{6.10}$$

A gép törzsén rezgést okozó tehetetlenségi és ezeket részben kiegyensúlyozó erők és nyomatékok kiegyensúlyozatlanul maradt erőinek és nyomatékainak Fourier-együtthatóit a következő mátrixegyenlet fejezi ki:

$$[\mathbf{R}_i] = [\mathbf{P}_{ij}][\mathbf{Q}_j] + [\mathbf{F}_i] \tag{6.11}$$

Az egyenletben szereplő tagok a következők:

$[\mathbf{R}_i]$  – a Fourier-sorral kifejezett, optimalizálás utáni kiegyensúlyozatlan erők és nyomatékok együtthatóinak oszlopmátrixa;

$[\mathbf{P}_{ij}]$  – a kiegyensúlyozó erők és tengelyek helyzetét meghatározó mátrix;

$[\mathbf{Q}_j]$  – az optimális kiegyensúlyozó erők oszlopmátrixa;

$[\mathbf{F}_i]$  – a Fourier-sorral kifejezett tehetetlenségi erők és a tehetetlenségi erők nyomatékai együtthatóinak oszlopmátrixa.

A (6.12) egyenletben kéttengelyes kiegyensúlyozás esetén  $i=1,2,\dots,12$  és  $j=1,2,\dots,8$ , egytengelyes kiegyensúlyozás esetén pedig  $i=1,2,\dots,10$  és  $j=1,2,\dots,4$ .

A kiegyensúlyozatlanul maradt erők és nyomatékok minimalizálására az együtthatókat meghatározó függvény kvadratikus alakját használjuk, azaz:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{R}_i]^T \cdot [\mathbf{R}_i] \quad i=1, 2, \dots, 6 \tag{6.12}$$

A (6.12) függvény optimális értéke meghatározható, ha a függvényt a „j” alkotóból álló kiegyensúlyozó  $Q_k$  erők szerint deriváljuk, azaz:

6. A TÉRMECHANIZMUSOK DINAMIKAI KIEGYENSÚLYOZÁSA ÉS OPTIMIZÁLÁSA

$$\frac{dU}{dQ} = \sum_{k=1}^j \frac{\partial U}{\partial Q_k} = \sum_{k=1}^j \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial Q_k} \right]^T \cdot [\mathbf{R}_i] + [\mathbf{R}_i]^T \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial Q_k} \right] \right) \quad (5.13)$$

Vegyük észre, hogy az  $\mathbf{R}_i$  oszlopmatrixra, valamint teljes deriváltjára felírható, hogy

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial Q_k} \right]^T \cdot [\mathbf{R}_i] = [\mathbf{R}_i]^T \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial Q_k} \right] \quad (6.14)$$

Ennek segítségével a (6.13) kifejezés a következő alakra hozható:

$$\frac{dU}{dQ} = \sum_{k=1}^j \frac{\partial U}{\partial Q_k} = 2 \cdot \sum_{k=1}^j \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial Q_k} \right]^T \cdot [\mathbf{R}_i] \right) = 2 \cdot \sum_{k=1}^j \left( [\mathbf{R}_i]^T \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial Q_k} \right] \right) \quad (6.15)$$

Ha a (6.13) mátrixegyenletben a kiegyensúlyozatlanul maradt erők Fourier-együtthatóit a  $Q_k$  általános erő szerint deriváljuk, akkor a következő kifejezésre jutunk:

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial Q_k} \right] = \frac{\partial}{\partial Q_k} ([\mathbf{P}_{ij}] \cdot [\mathbf{Q}_j] + [\mathbf{F}_i]) \quad (6.16)$$

Mivel a  $[\mathbf{P}_{ij}]$  és a  $[\mathbf{F}_i]$  oszlopmatrix nem függ a kiegyensúlyozó erőktől, következik, hogy:

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{P}_{ij}}{\partial Q_k} \right] = 0 \text{ és } \left[ \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial Q_k} \right] = 0 \quad (6.17)$$

Ezzel az eredménnyel a (6.16) kifejezés a következőképpen írható:

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial Q_k} \right] = \frac{\partial}{\partial Q_k} ([\mathbf{P}_{ij}] \cdot [\mathbf{Q}_j]) = [\mathbf{P}_{ij}] \cdot \frac{\partial}{\partial Q_k} ([\mathbf{Q}_j]) \quad (6.18)$$

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial Q_k} \right]^T = \frac{\partial}{\partial Q_k} ([\mathbf{P}_{ij}] \cdot [\mathbf{Q}_j])^T = \frac{\partial}{\partial Q_k} ([\mathbf{Q}_j]^T \cdot [\mathbf{P}_{ij}]^T) = \frac{\partial}{\partial Q_k} ([\mathbf{Q}_j]^T) \cdot [\mathbf{P}_{ij}]^T \quad (6.19)$$

Ha a (6.11), (6.18) és a (6.19) egyenlőségeket behelyettesítjük a (6.15) egyenletbe, megfelelő rendezés után a következő alakot kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dQ} &= 2 \cdot \sum_{k=1}^j \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial Q_k} \right]^T \cdot [\mathbf{R}_i] \right) = \\ &= 2 \cdot \sum_{k=1}^j \left( \frac{\partial}{\partial Q_k} [\mathbf{Q}_j]^T \cdot [\mathbf{P}_{ij}]^T \cdot ([\mathbf{P}_{ij}] \cdot [\mathbf{Q}_j] + [\mathbf{F}_i]) \right) \end{aligned} \quad (6.20)$$

Az  $U$  optimalizáló függvény minimumértékét a következő feltétel határozza meg:

$$\frac{dU}{dQ} = 0 \quad (6.21)$$

A fenti feltételhez elégséges hozzátolni a (6.20) egyenletből kifejezett feltételt, ahonnan:

$$[\mathbf{P}_{ij}]^T \cdot ([\mathbf{P}_{ij}] \cdot [\mathbf{Q}_j] + [\mathbf{F}_i]) = 0 \quad (6.22)$$

egyenletet, vagy pedig a

$$[\mathbf{P}_{ij}]^T \cdot [\mathbf{P}_{ij}] \cdot [\mathbf{Q}_j] + [\mathbf{P}_{ij}]^T \cdot [\mathbf{F}_i] = 0 \quad (6.23)$$

összefüggést. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$[\mathbf{N}_{jj}] = [\mathbf{P}_{ij}]^T \cdot [\mathbf{P}_{ij}] \quad (6.24)$$

$$[\mathbf{K}_j] = [\mathbf{P}_{ij}]^T \cdot [\mathbf{F}_i] \quad (6.25)$$

Ezekkel a (6.23) egyenletet  $Q_j$ -re lineáris alakra hoztuk:

$$[\mathbf{N}_{jj}] \cdot [\mathbf{Q}_j] + [\mathbf{K}_j] = 0 \quad (6.26)$$

A megoldás  $Q_j$ -re a következő:

$$[\mathbf{Q}_j] = -[\mathbf{N}_{jj}]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_j] \quad (6.27)$$

### 6.3. Gyakorlati alkalmazás

#### 6.3.1. Az ellensúlyok tartótengelyére ható optimális kiegyensúlyozó erők alkotóinak meghatározása

Feltételezzük, hogy az egytengelyű kiegyensúlyozást a gépben létező  $OZ$  tengelyre szerelt ellensúlyokkal próbáljuk megvalósítani.

Ebben az esetben az  $OX$  és az  $OY$  koordinátatengelyekkel párhuzamos kiegyensúlyozó tengelyek hiányoznak, azaz:  $F_{x1} = F_{x2} = F_{y1} = F_{y2} = 0$  tehát összetevői is zérusértékűek:  $Q_1 = Q_2 = R_1 = R_2 = S_1 = S_2 = T_1 = T_2 = 0$ . Amint az [51] közlemény is tárgyalja, a mechanizmust terhelő tehetetlenségi erők és ezek nyomatókai egyetlen tengelyre helyezett ellensúlyok beiktatásával nem redukálhatók. Mivel az (5.9) és (5.10) egyenletek alkalmazásával ezek részben csökkenthetők, az (5.6) mátrix-

6. A TÉRMECHANIZMUSOK DINAMIKAI KIEGYENSÚLYOZÁSA ÉS OPTIMIZÁLÁSA

egyenlet jobb oldalára a kiegyensúlyozatlanul maradt tehetetlenségi erők és nyomatékok Fourier-együtthatóit írjuk be:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -a_y & -a_y & a_z & a_z & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_1 & -c_2 \\
 a_z & a_z & a_y & a_y & 0 & 0 & -b_1 & -b_2 & -c_1 & -c_2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -a_1 & -a_2 & -b_z & -b_z & b_x & b_x & c_1 & c_2 & 0 & 0 \\
 -a_1 & -a_2 & 0 & 0 & b_x & b_x & b_z & b_x & 0 & 0 & -c_1 & -c_2 \\
 a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & -b_2 & -c_x & -c_x & c_y & c_y \\
 0 & 0 & -a_1 & -a_2 & -b_1 & -b_2 & 0 & 0 & c_y & c_y & c_x & c_x
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 U_1 \\
 U_2 \\
 V_1 \\
 V_2
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 A_{FX} \\
 B_{FX} \\
 A_{FY} \\
 B_{FY} \\
 A_{FZ} \\
 B_{FZ} \\
 A_{MX} \\
 B_{MX} \\
 A_{MY} \\
 B_{MY} \\
 A_{MZ} \\
 B_{MZ}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 A_{\Sigma Fx} \\
 B_{\Sigma Fx} \\
 A_{\Sigma Fy} \\
 B_{\Sigma Fy} \\
 A_{\Sigma Fz} \\
 B_{\Sigma Fz} \\
 A_{\Sigma Mx} \\
 B_{\Sigma Mx} \\
 A_{\Sigma My} \\
 B_{\Sigma My} \\
 A_{\Sigma Mz} \\
 B_{\Sigma Mz}
 \end{bmatrix}
 \tag{6.28}$$

Az  $OX$  és az  $OY$  koordinátatengelyekkel párhuzamos kiegyensúlyozó tengelyek és ellensúlyaik hiányában az ellensúlyok pozícióit meghatározó koordináták értékei fölöslegessé válnak, illetve a (6.6) (6.9) és (6.10) egyenleteket figyelembe véve a (6.28) mátrixegyenletről felírható:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -c_1 & -c_2 \\
 -c_1 & -c_2 & 0 & 0 \\
 c_1 & c_2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -c_1 & -c_2 \\
 -c_x & -c_x & c_y & c_y \\
 c_y & c_y & c_x & c_x
 \end{bmatrix}
 \cdot
 \begin{bmatrix}
 U_1 \\
 U_2 \\
 V_1 \\
 V_2
 \end{bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix}
 A_{FX} \\
 B_{FX} \\
 A_{FY} \\
 B_{FY} \\
 A_{FZ} \\
 B_{FZ} \\
 A_{MX} \\
 B_{MX} \\
 A_{MY} \\
 B_{MY} \\
 A_{MZ} \\
 B_{MZ}
 \end{bmatrix}
 = 0
 \tag{6.29}$$

A (6.29) egyenletrendszer megoldása után a kiegyensúlyozatlanul maradt tehetetlenségi erők és nyomatékainak együtthatói a következők:



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & -c_2 \\ -c_1 & -c_2 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_1 & -c_2 \\ -c_x & -c_x & c_y & c_y \\ c_y & c_y & c_x & c_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\Sigma Fx} \\ B_{\Sigma Fx} \\ A_{\Sigma Fy} \\ B_{\Sigma Fy} \\ A_{\Sigma Mx} \\ B_{\Sigma Mx} \\ A_{\Sigma My} \\ B_{\Sigma My} \\ A_{\Sigma Mz} \\ B_{\Sigma Mz} \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

### 6.3.2. Az első kiegyensúlyozó tengellyel ellentétes irányban forgó, második tengelyre ható optimális kiegyensúlyozó erők alkotóinak meghatározása

Feltételezzük, hogy az optimális kiegyensúlyozást a főtengely irányát meghatározó  $OZ$  tengellyel párhuzamos tengelyekkel végezzük. A második tengely forgásiránya ellentétes a mechanizmus vezető tagjának forgásirányával. A második tengely ellensúlyai által gerjesztett kiegyensúlyozó erők kettős indexet kapnak, amelynek második száma a tengely sorrendjét jelzi.

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 &= A_{\Sigma Fx} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{\Sigma Fx} \cdot \sin \omega \cdot t + \\
 &+ F_{Z12} \cdot \cos(-\omega \cdot t + \varphi_{Z12}) + F_{Z22} \cdot \cos(-\omega \cdot t + \varphi_{Z22}) + \\
 &+ F_{Y1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Y1}) + F_{Y2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Y2}) \\
 \sum F_y = 0 &= A_{\Sigma Fy} \cos \omega \cdot t + B_{\Sigma Fy} \sin \omega \cdot t + F_{X1} \cos(\omega \cdot t + \varphi_{X1}) + \\
 &+ F_{X2} \cos(\omega \cdot t + \varphi_{X2}) + F_{Z12} \sin(-\omega \cdot t + \varphi_{Z12}) + \\
 &+ F_{Z22} \sin(-\omega \cdot t + \varphi_{Z22}) \\
 \sum F_z = 0 &= A_{\Sigma Fz} \cos \omega \cdot t + B_{\Sigma Fz} \sin \omega \cdot t + F_{X1} \sin(\omega \cdot t + \varphi_{X1}) + \\
 &+ F_{X2} \sin(\omega \cdot t + \varphi_{X2}) + F_{Y1} \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Y1}) + \\
 &+ F_{Y2} \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Y2}) \\
 \sum M_x = 0 &= A_{\Sigma Mx} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{\Sigma Mx} \cdot \sin \omega \cdot t + \\
 &+ b_1 \cdot F_{Y1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Y1}) + b_2 \cdot F_{Y2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Y2}) - \\
 &- c_1 \cdot F_{Z12} \cdot \sin(-\omega \cdot t + \varphi_{Z12}) - c_2 \cdot F_{Z22} \cdot \sin(-\omega \cdot t + \varphi_{Z22}) - \\
 &- a_y \cdot F_{X1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{X1}) - a_y \cdot F_{X2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{X2}) + \\
 &+ a_z \cdot F_{X1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{X1}) + a_z \cdot F_{X2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{X2})
 \end{aligned}$$

## 6. A TÉRMECHANIZMUSOK DINAMIKAI KIEGYENSÚLYOZÁSA ÉS OPTIMIZÁLÁSA

$$\begin{aligned}
\sum M_y = 0 &= A_{\Sigma MY} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{\Sigma MY} \cdot \sin \omega \cdot t + \\
&+ c_1 \cdot F_{Z12} \cdot \cos(-\omega \cdot t + \varphi_{Z12}) + c_2 \cdot F_{Z22} \cdot \cos(-\omega \cdot t + \varphi_{Z22}) - \\
&- a_1 \cdot F_{X1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{X1}) - a_2 \cdot F_{X2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{X2}) - \\
&- b_z \cdot F_{Y1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Y1}) - b_z \cdot F_{Y2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{Y2}) + \\
&+ b_x F_{Y1} \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Y1}) + b_x F_{Y2} \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Y2}) \\
\sum M_z = 0 &= A_{\Sigma MZ} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{\Sigma MZ} \cdot \sin \omega \cdot t + \\
&+ a_1 \cdot F_{X1} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{X1}) + a_2 \cdot F_{X2} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_{X2}) - \\
&- b_1 \cdot F_{Y1} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Y1}) - b_2 \cdot F_{Y2} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{Y2}) + \\
&+ c_y \cdot F_{Z12} \cdot \sin(-\omega \cdot t + \varphi_{Z12}) + c_y \cdot F_{Z22} \cdot \sin(-\omega \cdot t + \varphi_{Z22}) - \\
&- c_x \cdot F_{Z21} \cdot \cos(-\omega \cdot t + \varphi_{Z12}) - c_x \cdot F_{Z22} \cdot \cos(-\omega \cdot t + \varphi_{Z22})
\end{aligned} \tag{6.31}$$

A fázisszögeket az óramutató járásával ellentétesen definiáljuk pozitívnak, ezért előjelük változatlan marad. Az összetevő erők pedig a (6.4) képlet szerint és a kettős index figyelembevételével az alábbi módon írhatók fel:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= F_{X1} \cdot \cos \varphi_{X1}; Q_2 = F_{X2} \cdot \cos \varphi_{X2} \\
R_1 &= F_{X1} \cdot \sin \varphi_{X1}; R_2 = F_{X2} \cdot \sin \varphi_{X2} \\
S_1 &= F_{Y1} \cdot \cos \varphi_{Y1}; S_2 = F_{Y2} \cdot \cos \varphi_{Y2} \\
T_1 &= F_{Y1} \cdot \sin \varphi_{Y1}; T_2 = F_{Y2} \cdot \sin \varphi_{Y2} \\
U_{12} &= F_{Z12} \cdot \cos \varphi_{Z12}; U_{22} = F_{Z22} \cdot \cos \varphi_{Z22} \\
V_{12} &= F_{Z12} \cdot \sin \varphi_{Z12}; V_{22} = F_{Z22} \cdot \sin \varphi_{Z22}
\end{aligned} \tag{6.32}$$

$$\begin{aligned}
\sum F_x = 0 &= (A_{\Sigma FX} + U_{12} + U_{22} + T_1 + T_2) \cdot \cos \omega t + \\
&+ (B_{\Sigma FX} + V_{12} + V_{22} + S_1 + S_2) \cdot \sin \omega t \\
\sum M_x = 0 &= \\
&= \left( A_{\Sigma MX} + b_1 \cdot S_1 + b_2 \cdot S_2 - c_{12} \cdot V_{12} - c_{22} \cdot V_{22} - \right. \\
&\quad \left. - a_y \cdot Q_1 - a_y \cdot Q_2 + a_z \cdot R_1 + a_z \cdot R_2 \right) \cdot \cos \omega t + \\
&+ \left( B_{\Sigma MX} - b_1 \cdot T_1 - b_2 \cdot T_2 + c_{12} \cdot U_{12} + \right. \\
&\quad \left. + c_{22} \cdot U_{22} + a_z \cdot Q_1 + a_z \cdot Q_2 + a_y \cdot R_1 + a_y \cdot R_2 \right) \cdot \sin \omega \cdot t
\end{aligned}$$

6. A TÉRMECHANIZMUSOK DINAMIKAI KIEGYENSÚLYOZÁSA ÉS OPTIMIZÁLÁSA

$$\begin{aligned}
 \Sigma M_y = 0 &= \\
 &= \begin{pmatrix} A_{\Sigma MY} - a_1 \cdot R_1 - a_2 \cdot R_2 + c_{12} \cdot U_{12} + c_{22} \cdot U_{22} - \\ -b_z \cdot S_1 - b_z \cdot S_2 + b_x \cdot T_1 + b_x \cdot T_2 \end{pmatrix} \cdot \cos \omega t + \\
 &+ \begin{pmatrix} B_{\Sigma MY} + c_{12} \cdot V_{12} + c_{22} \cdot V_{22} - a_1 \cdot Q_1 - a_2 \cdot Q_2 + \\ +b_z \cdot T_1 + b_z \cdot T_2 + b_x \cdot S_1 + b_x \cdot S_2 \end{pmatrix} \cdot \sin \omega \cdot t \\
 \Sigma M_z = 0 &= \\
 &= \begin{pmatrix} A_{\Sigma MZ} + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 - b_1 \cdot T_1 - b_2 \cdot T_2 + \\ +c_{y2} \cdot V_{12} + c_{y2} \cdot V_{22} - c_{x2} \cdot U_{12} - c_{x2} \cdot U_{22} \end{pmatrix} \cdot \cos \omega t + \\
 &+ \begin{pmatrix} B_{\Sigma MZ} - a_1 \cdot R_1 - a_2 \cdot R_2 - b_1 \cdot S_1 - b_2 \cdot S_2 - c_{y2} \cdot U_{12} - \\ -c_{y2} \cdot U_{22} - c_{x2} \cdot V_{12} - c_{x2} \cdot V_{22} \end{pmatrix} \sin \omega t
 \end{aligned}
 \tag{6.33}$$

A teljes kinematikai ciklusra vonatkozó kiegyensúlyozás abban az esetben, amikor az  $OZ$  tengely  $-\omega$  szögsebességgel forog, a (6.11) egyenlet szerint felírható a 12 ismeretlent tartalmazó (6.33) lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_y & -a_y & a_z & a_z & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{12} & -c_{22} \\ a_z & a_z & a_y & a_y & 0 & 0 & -b_1 & -b_2 & c_{12} & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 & -a_2 & -b_z & -b_z & b_x & b_x & c_{12} & c_{22} & 0 & 0 \\ -a_1 & -a_2 & 0 & 0 & b_x & b_x & b_z & b_z & 0 & 0 & c_{12} & c_{22} \\ a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & -b_2 & -c_{x2} & -c_{x2} & c_{y2} & c_{y2} \\ 0 & 0 & -a_1 & -a_2 & -b_1 & -b_2 & 0 & 0 & -c_{y2} & -c_{y2} & -c_{x2} & -c_{x2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ R_1 \\ R_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ T_1 \\ T_2 \\ U_{12} \\ U_{22} \\ V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{\Sigma Fx} \\ B_{\Sigma Fx} \\ A_{\Sigma Fy} \\ B_{\Sigma Fy} \\ A_{\Sigma Fz} \\ B_{\Sigma Fz} \\ A_{\Sigma Mx} \\ B_{\Sigma Mx} \\ A_{\Sigma My} \\ B_{\Sigma My} \\ A_{\Sigma Mz} \\ B_{\Sigma Mz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{SFx} \\ B_{SFx} \\ A_{SFy} \\ B_{SFy} \\ A_{SFz} \\ B_{SFz} \\ A_{SMx} \\ B_{SMx} \\ A_{SMY} \\ B_{SMY} \\ A_{SMZ} \\ B_{SMZ} \end{bmatrix}
 \tag{6.34}$$

6. A TÉRMECHANIZMUSOK DINAMIKAI KIEGYENSÚLYOZÁSA ÉS OPTIMIZÁLÁSA

A második tengely már csak az első tengely optimális ellensúlyainak beiktatása után is kiegyensúlyozatlanul maradt tehetetlenségi erőket és ezek nyomatékait fogja kiegyensúlyozni. A (6.26) képlet szerint a második tengelyre is felírható a következő egyenlet:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -a_y & -a_y & a_z & a_z & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{12} & -c_{22} \\
 a_z & a_z & a_y & a_y & 0 & 0 & -b_1 & -b_2 & c_{12} & c_{22} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -a_1 & -a_2 & -b_z & -b_z & b_x & b_x & c_{12} & c_{22} & 0 & 0 \\
 -a_1 & -a_2 & 0 & 0 & b_x & b_x & b_z & b_z & 0 & 0 & c_{12} & c_{22} \\
 a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -b_1 & -b_2 & -c_{x2} & -c_{x2} & c_{y2} & c_{y2} \\
 0 & 0 & -a_1 & -a_2 & -b_1 & -b_2 & 0 & 0 & -c_{y2} & -c_{y2} & -c_{x2} & -c_{x2}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ R_1 \\ R_2 \\ S_1 \\ S_2 \\ T_1 \\ T_2 \\ U_{12} \\ U_{22} \\ V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{\Sigma Fx} \\ B_{\Sigma Fx} \\ A_{\Sigma Fy} \\ B_{\Sigma Fy} \\ A_{\Sigma Fz} \\ B_{\Sigma Fz} \\ A_{\Sigma Mx} \\ B_{\Sigma Mx} \\ A_{\Sigma My} \\ B_{\Sigma My} \\ A_{\Sigma Mz} \\ B_{\Sigma Mz} \end{bmatrix} = 0 \tag{6.35}$$

A második tengelyre szerelt ellensúlyok értékei a (6.35) egyenlet szerint meghatározhatók, a kiegyensúlyozatlanul maradt együttthatók értékeit a következő rendszer adja:

$$\begin{bmatrix}
 1 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 \\
 -1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -c_{12} & -c_{22} \\
 c_{12} & c_{22} & 0 & 0 \\
 c_{12} & c_{22} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & c_{12} & c_{22} \\
 -c_{x2} & -c_{x2} & c_{y2} & c_{y2} \\
 -c_{y2} & -c_{y2} & -c_{x2} & -c_{x2}
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \\ V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{\Sigma FX} \\ B_{\Sigma FX} \\ A_{\Sigma FY} \\ B_{\Sigma FY} \\ A_{\Sigma FZ} \\ B_{\Sigma FZ} \\ A_{\Sigma MX} \\ B_{\Sigma MX} \\ A_{\Sigma MY} \\ B_{\Sigma MY} \\ A_{\Sigma MZ} \\ B_{\Sigma MZ} \end{bmatrix} = 0 \tag{6.36}$$

Két, ellentétes irányban forgó kiegyensúlyozó tengely hatása után fennmaradó tehetetlenségi erőket és a tehetetlenségi erők nyomatékait a (6.37) egyenletrendszerrel lehet meghatározni.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_{12} & -c_{22} \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{12} & c_{22} \\ -c_{x2} & -c_{x2} & c_{y2} & c_{y2} \\ -c_{y2} & -c_{y2} & -c_{x2} & -c_{x2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \\ V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{SFX} \\ B_{SFX} \\ A_{SFY} \\ B_{SFY} \\ A_{SFZ} \\ B_{SFZ} \\ A_{SMX} \\ B_{SMX} \\ A_{SMY} \\ B_{SMY} \\ A_{SMZ} \\ B_{SMZ} \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

### 6.3.3. Példa

Legyen a DÜRKOPP ADLER cég által gyártott KI. 272 típusú ipari varrógép  $n=5500$  ford/perc fordulatszámra számított tehetetlenségi erők és nyomatékai, Fourier-sorban kifejtett első harmonikusainak alkotói:  $A_{Fx}=113.19$ ,  $B_{Fx}=35.72$ ,  $A_{Fy}=92.57$ ,  $B_{Fy}=-114.67$ ,  $A_{Fz}=0$ ,  $B_{Fz}=0$ , [N],  $A_{Mx}=-4.22$ ,  $B_{Mx}=6.76$ ,  $A_{My}=39.71$ ,  $B_{My}=22.32$ ,  $A_{Mz}=10.28$ ,  $B_{Mz}=-12.64$  [Nm]. A géptörzs súlypontjába helyezett koordinátához viszonyított főtengely helyzetét meghatározó értékek  $c_x=-0.001651$ ,  $c_y=0.1028$  [m], a tengelyen elhelyezett ellensúlyoké pedig  $c_1=0.17484$ ,  $c_2=-0.13146$  [m].

A (6.29) képlettel meghatározott kiegyensúlyozó erők alkotói a következők:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -53.1972 \\ 54.5716 \\ 17.18 \\ -45.99 \end{bmatrix}, \text{ [N]}$$

A kiegyensúlyozatlanul maradt erők és nyomatékok alkotói a (6.34) képlet szerint a következők:

$$A_{\Sigma Fx} = 114.5659, \quad B_{\Sigma Fx} = 64.5314, \quad A_{\Sigma Fy} = 63.7574, \quad B_{\Sigma Fy} = -113.2971, \\
 A_{\Sigma Fz} = 0, \quad B_{\Sigma Fz} = 0, \text{ [N]},$$

$$A_{\Sigma Mx} = -13.27249, \quad B_{\Sigma Mx} = 23.2399, \quad A_{\Sigma My} = 23.2399, \quad B_{\Sigma My} = 13.27249, \\
 A_{\Sigma Mz} = 7.32411, \quad B_{\Sigma Mz} = -12.452038 \text{ [Nm]}.$$

Legyen a második kiegyensúlyozó tengelyre vonatkozó adatok értékei:  $c_{x2} = 0.04835$ ,  $c_{y2} = 0.102867$ ,  $c_{12} = 0.1748$ ,  $c_{22} = -0.13146$  [m].

A (6.36) egyenletrendszer megoldása után a második tengelyre ható kiegyensúlyozó erők alkotói a következők:

$$\begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \\ V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -124.328 \\ 11.0291 \\ -71.0408 \\ 6.4788 \end{bmatrix} \quad [\text{N}]$$

A két kiegyensúlyozó tengely hatása után kiegyensúlyozatlanul maradt tehetetlenségi erők és nyomatékainak alkotói a (6.37) egyenlet szerint a következők:

$$\begin{bmatrix} A_{SFX} \\ B_{SFX} \\ A_{SFY} \\ B_{SFY} \\ A_{SFZ} \\ B_{SFZ} \\ A_{SMX} \\ B_{SMX} \\ A_{SMY} \\ B_{SMY} \\ A_{SMZ} \\ B_{SMZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9666 \\ -0.03058 \\ -0.80455 \\ 0.302139 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6.175 \\ 2.355 \end{bmatrix} \quad [\text{N}], [\text{Nm}]$$

A kiegyensúlyozó erők fázisszögeit a (6.8) egyenlet adja.

#### 6.4. A géptörzshöz tartozó szabadon választott pont rezgésamplitúdóinak meghatározása

Ez a módszer nem alkalmas a gépben fellépő tehetetlenségi erők és a tehetetlenségi erők nyomatékainak optimális kiegyensúlyozására. Ez a megoldás csak egy adott pont rezgésamplitúdóját csökkenti. A gép többi részén megnövekedhetnek a kiegyensúlyozatlanul maradt erők és nyomatékok, ez pedig ronthatja az optimálisan kiegyensúlyozott gép zajszintjét, ezért csak jól indokolt esetben alkalmazható. Ezzel szemben nagyon jól alkalmazható az optimális kiegyensúlyozás helyességének ellenőrzésére. Ha a kiegyensúlyozási számítások helyesek, akkor a rezgésamplitúdók a gép minden pontjában csökkenni fognak.

Egy választott pont rezgésamplitúdójának ideális mértékű csökkentése az elkövetkezőkben részletesen kifejtett optimalizálási eljárással érhető el. Az optimalizálás célja a Fourier-sorba fejtett erők és nyomatékok első harmonikusára által gerjesztett rezgések amplitúdójának minimizálása egy adott pontban, de nem az egész gépben.

A géptörzs súlypontjára számított tehetetlenségi erők, a tehetetlenségi erők nyomatékai, a kiegyensúlyozó erők és ezek nyomatékai hatása alatt álló gép úgy tekinthető, mint egy térben elhelyezett szabad test, amelynek mozgását másodrendű differenciálegyenlet-rendszerrel írhatjuk le.

$$\begin{aligned} \sum F_x &= M \cdot \ddot{x} = A_x \cdot \cos \omega \cdot t + B_x \cdot \sin \omega \cdot t \\ \sum F_y &= M \cdot \ddot{y} = A_y \cdot \cos \omega \cdot t + B_y \cdot \sin \omega \cdot t \\ \sum F_z &= M \cdot \ddot{z} = A_z \cdot \cos \omega \cdot t + B_z \cdot \sin \omega \cdot t \\ \sum M_x &= J_x \cdot \ddot{\alpha} = A_\alpha \cdot \cos \omega \cdot t + B_\alpha \cdot \sin \omega \cdot t \\ \sum M_y &= J_y \cdot \ddot{\beta} = A_\beta \cdot \cos \omega \cdot t + B_\beta \cdot \sin \omega \cdot t \\ \sum M_z &= J_z \cdot \ddot{\gamma} = A_\gamma \cdot \cos \omega \cdot t + B_\gamma \cdot \sin \omega \cdot t \end{aligned} \quad (6.38)$$

Az  $A$  és  $B$  kifejezései formálisan megegyeznek a (6.5) egyenlet zárójelbe foglalt együtthatóival, megjegyezve, hogy a zárójel tagjai a tehetetlenségi erők, a tehetetlenségi erők nyomatékainak együtthatói, mint  $A_{FX}$ ;  $B_{FX}$ ; vagy  $A_{MX}$ ;  $B_{MX}$ ; és a kiegyensúlyozó tengelyekre helyezett ellensúlyok által bevitt kiegyensúlyozó erők és nyomatékok együtthatóiból tevődik össze. Az  $M$  a rendszer teljes tömegét jelöli, a  $J_x$ ,  $J_y$  és  $J_z$  értékek pedig a géptörzs súlyponti főtengelyeire számított tehetetlenségi nyomatékok, feltételezve, hogy a tehetetlenségi főtengelyek egybeesnek a súlypontban felvett alaprendszer XYZ tengelyeivel.

Összevetve a (6.5) és (6.38) rendszereket, felírhatók a gép súlypontjának harmonikus rezgőmozgását leíró Fourier-féle együtthatók kifejezései, amelyek rendre a következők:

$$\begin{aligned} A_x &= A_{FX} + U_1 + U_2 + T_1 + T_2 \\ B_x &= B_{FX} - V_1 - V_2 + S_1 + S_2 \\ A_y &= A_{FY} + Q_1 + Q_2 + V_1 + V_2 \\ B_y &= B_{FY} + U_1 + U_2 - R_1 - R_2 \\ A_z &= A_{FZ} + S_1 + S_2 + R_1 + R_2 \end{aligned}$$

6. A TÉRMECHANIZMUSOK DINAMIKAI KIEGYENSÚLYOZÁSA ÉS OPTIMIZÁLÁSA

$$\begin{aligned}
 B_z &= B_{FZ} + Q_1 + Q_2 - T_1 - T_2 \\
 A_\alpha &= A_{MX} + b_1 \cdot S_1 + b_2 \cdot S_2 - c_1 \cdot V_1 - c_2 \cdot V_2 - a_y \cdot (Q_1 + Q_2) + \\
 &\quad + a_z \cdot (R_1 + R_2) \\
 B_\alpha &= B_{MX} - b_1 \cdot T_1 - b_2 \cdot T_2 - c_1 \cdot U_1 - c_2 \cdot U_2 + a_z \cdot (Q_1 + Q_2) + \\
 &\quad + a_y \cdot (R_1 + R_2) \\
 A_\beta &= A_{MY} - a_1 \cdot R_1 - a_2 \cdot R_2 + c_1 \cdot U_1 + c_2 \cdot U_2 - b_z \cdot (S_1 + S_2) + \\
 &\quad + b_x \cdot (T_1 + T_2) \\
 B_\beta &= B_{MY} - c_1 \cdot V_1 - c_2 \cdot V_2 - a_1 \cdot Q_1 - a_2 \cdot Q_2 + b_z \cdot (T_1 + T_2) + \\
 &\quad + b_x \cdot (S_1 + S_2) \\
 A_\gamma &= A_{MZ} + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 - b_1 \cdot T_1 - b_2 \cdot T_2 + c_y \cdot (V_1 + V_2) - \\
 &\quad - c_x \cdot (U_1 + U_2) \\
 B_\gamma &= B_{MZ} - a_1 \cdot R_1 - a_2 \cdot R_2 - b_1 \cdot S_1 - b_2 \cdot S_2 + c_y \cdot (U_1 + U_2) + \\
 &\quad + c_x \cdot (V_1 + V_2) \tag{6.39}
 \end{aligned}$$

A (6.38) differenciálegyenletek idő függvényében való kétszeres integrálása után felírhatók a tehetetlenségi erők, a tehetetlenségi erők nyomatókai, a kiegyensúlyozó erők és nyomatókai által gerjesztett rendszer súlypontja körüli kilengések.

Elteltekintve a géptörzsön választott pont kilengésének időben való változását meghatározó fázisszögektől, az integrálási állandókat is nullának tekinthetjük.

$$\left. \begin{aligned}
 x &= -\frac{1}{M \cdot \omega^2} \cdot (A_x \cdot \cos \omega \cdot t + B_x \cdot \sin \omega \cdot t) \\
 y &= -\frac{1}{M \cdot \omega^2} \cdot (A_y \cdot \cos \omega \cdot t + B_y \cdot \sin \omega \cdot t) \\
 z &= -\frac{1}{M \cdot \omega^2} \cdot (A_z \cdot \cos \omega \cdot t + B_z \cdot \sin \omega \cdot t) \\
 \alpha &= -\frac{1}{J_x \cdot \omega^2} \cdot (A_\alpha \cdot \cos \omega \cdot t + B_\alpha \cdot \sin \omega \cdot t) \\
 \beta &= -\frac{1}{J_y \cdot \omega^2} \cdot (A_\beta \cdot \cos \omega \cdot t + B_\beta \cdot \sin \omega \cdot t) \\
 \gamma &= -\frac{1}{J_z \cdot \omega^2} \cdot (A_\gamma \cdot \cos \omega \cdot t + B_\gamma \cdot \sin \omega \cdot t)
 \end{aligned} \right\} \tag{6.40}$$

A mechanizmus állványán, illetve a géptörzsön felvett  $(x_p, y_p, z_p)$  koordinátájú  $P$  pont egy külső, rögzített rendszerhez viszonyított kilengéseire az (1.29) képlet szerint felírhatjuk, hogy:



$$\left. \begin{aligned} x_p &= x + z_1 \cdot \beta - y_1 \cdot \gamma \\ y_p &= y + x_1 \cdot \gamma - z_1 \cdot \alpha \\ z_p &= z + y_1 \cdot \alpha - x_1 \cdot \beta \end{aligned} \right\} \quad (6.41)$$

A (6.40) egyenletet behelyettesítve a (6.41) egyenletbe, a tagok megfelelő csoportosítása után a gerjesztő tehetetlenségi és a csillapító kiegyensúlyozó erők és nyomatékok *együttes* hatása alatt álló rendszer  $P(x_p, y_p, z_p)$  pontjának kilengéseit a következő alakban írhatjuk fel:

$$\left. \begin{aligned} x_p &= - \left( \frac{A_x}{M \cdot \omega^2} + \frac{z_1 \cdot A_\beta}{J_y \cdot \omega^2} - \frac{y_1 \cdot A_\gamma}{J_z \cdot \omega^2} \right) \cdot \cos \omega \cdot t - \\ &\quad - \left( \frac{B_x}{M \cdot \omega^2} + \frac{z_1 \cdot B_\beta}{J_y \cdot \omega^2} - \frac{y_1 \cdot B_\gamma}{J_z \cdot \omega^2} \right) \cdot \sin \omega \cdot t \\ y_p &= - \left( \frac{A_y}{M \cdot \omega^2} + \frac{x_1 \cdot A_\gamma}{J_z \cdot \omega^2} - \frac{z_1 \cdot A_\alpha}{J_x \cdot \omega^2} \right) \cdot \cos \omega \cdot t - \\ &\quad - \left( \frac{B_y}{M \cdot \omega^2} + \frac{x_1 \cdot B_\gamma}{J_z \cdot \omega^2} - \frac{z_1 \cdot B_\alpha}{J_x \cdot \omega^2} \right) \cdot \sin \omega \cdot t \\ z_p &= - \left( \frac{A_z}{M \cdot \omega^2} + \frac{y_1 \cdot A_\alpha}{J_x \cdot \omega^2} - \frac{x_1 \cdot A_\beta}{J_y \cdot \omega^2} \right) \cdot \cos \omega \cdot t - \\ &\quad - \left( \frac{B_z}{M \cdot \omega^2} + \frac{y_1 \cdot B_\alpha}{J_x \cdot \omega^2} - \frac{x_1 \cdot B_\beta}{J_y \cdot \omega^2} \right) \cdot \sin \omega \cdot t \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

A (6.42) egyenletet összevont alakban a következőképpen írjuk fel:

$$\left. \begin{aligned} x_p &= A_{px} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{px} \cdot \sin \omega \cdot t \\ y_p &= A_{py} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{py} \cdot \sin \omega \cdot t \\ z_p &= A_{pz} \cdot \cos \omega \cdot t + B_{pz} \cdot \sin \omega \cdot t \end{aligned} \right\} \quad (6.43)$$

A szinusz- és koszinuszfüggvények Fourier-együtthatói a (6.42) összefüggésekkel való megfelelő társításból adódnak.

A (6.42) vagy a (6.43) rendszerek kilengéseinek amplitúdói a kiegyensúlyozatlan mechanizmus (6.44) egyenlettel kifejezett Fourier-együtthatókból és az ellensúlyok okozta rezgéscsillapító amplitúdókból tevődnek össze.

A kiegyensúlyozatlan mechanizmus rezgésamplitúdóit kifejező (6.44) egyenletben a rezgéscsillapító, illetve a kiegyensúlyozó erők hatásai az (6.39) egyenlőségek szerint vannak kizárva.

$$\begin{aligned} A_{px_o} &= - \left( \frac{A_{FX}}{M \cdot \omega^2} + \frac{z_1 \cdot A_{MY}}{J_y \cdot \omega^2} - \frac{y_1 \cdot A_{MZ}}{J_z \cdot \omega^2} \right) B_{px_o} = - \left( \frac{B_{FX}}{M \cdot \omega^2} + \frac{z_1 \cdot B_{MY}}{J_y \cdot \omega^2} - \frac{y_1 \cdot B_{MZ}}{J_z \cdot \omega^2} \right) \\ A_{py_o} &= - \left( \frac{A_{FY}}{M \cdot \omega^2} + \frac{x_1 \cdot A_{MZ}}{J_z \cdot \omega^2} - \frac{z_1 \cdot A_{MX}}{J_x \cdot \omega^2} \right) B_{py_o} = - \left( \frac{B_{FY}}{M \cdot \omega^2} + \frac{x_1 \cdot B_{MZ}}{J_z \cdot \omega^2} - \frac{z_1 \cdot B_{MX}}{J_x \cdot \omega^2} \right) \end{aligned}$$

$$A_{pz_0} = -\left(\frac{A_{FZ}}{M \cdot \omega^2} + \frac{y_1 \cdot A_{MX}}{J_x \cdot \omega^2} - \frac{x_1 \cdot A_{MY}}{J_y \cdot \omega^2}\right) B_{pz_0} = -\left(\frac{B_{FZ}}{M \cdot \omega^2} + \frac{y_1 \cdot B_{MX}}{J_x \cdot \omega^2} - \frac{x_1 \cdot B_{MY}}{J_y \cdot \omega^2}\right) \quad (6.44)$$

### 6.5. Egy adott pont rezgésamplitúdójának optimalizálása

A gép rezgését okozó, valamint a kiegyensúlyozó erők hatása alatt álló pont kilengéseinek koordinátáit a (6.43) összefüggések adják. A gép törzsére ható tehetetlenségi erők és a tehetetlenségi erők nyomatókai a gépben egyensúlyzavart és ezáltal rezgést okoznak. Az adott pont rezgésének minimálisra való csökkentéséhez a pont harmonikus rezgőmozgását meghatározó együtthatóinak négyzetét tekintjük célfüggvénynek. A választott pont rezgésamplitúdójának minimálisra való csökkentéséhez elégséges, ha megkeressük az adott függvény kvadrátikus alakjának minimális értékét, azaz:

$$\mathbf{E}_p = \begin{bmatrix} A_{px} \\ B_{px} \\ A_{py} \\ B_{py} \\ A_{pz} \\ B_{pz} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} A_{px} \\ B_{px} \\ A_{py} \\ B_{py} \\ A_{pz} \\ B_{pz} \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

A (6.45) összefüggés általános alakban felírva a következő:

$$\mathbf{E}_p = [\mathbf{A}_i]^T \cdot [\mathbf{A}_i], \quad i=1,2\dots6. \quad (6.46)$$

Az optimalizálás célparaméterei a kiegyensúlyozó erők és ezek fázisszögei. A gép törzsén választott pontnak megfelelően, a rezgést okozó tehetetlenségi és ezeket kiegyensúlyozó erők hatása alatt álló gép harmonikus rezgőmozgását meghatározó Fourier-sor együtthatói általánosan a következő mátrixegyenlettel fejezhetők ki:

$$[\mathbf{A}_i] = [\mathbf{G}_{ij}] \cdot [\mathbf{Q}_j] + [\mathbf{C}_i], \quad (6.47)$$

A (6.47) egyenletet alkotó mátrixok jelentése a következő:

$[\mathbf{G}_{ij}]$  – az általános alakban írt kiegyensúlyozó erők meghatározásához szükséges méreteket tartalmazó mátrix;

$[\mathbf{Q}_j]$  – az általános alakban írt kiegyensúlyozó erők oszlopmátrixa;

$[\mathbf{C}_i]$  – a kiegyensúlyozatlan gép rezgését kifejező általános alakban írt tehetetlenségi erők és a tehetetlenségi erők nyomatókainak értékei szerint meghatározott Fourier-sor együtthatóinak oszlop-mátrixa, a (6.44) egyenlet szerint.

A (6.47) függvény optimális értéke a Fermat-féle tétel alkalmazásával meghatározható, ha a függvényt a  $j$  számú kiegyensúlyozó  $\mathbf{Q}_k$  erők szerint deriváljuk, azaz:

$$\left[ \frac{d\mathbf{E}_p}{d\mathbf{Q}} \right] = \sum_{k=1}^j \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial \mathbf{Q}_k} = \sum_{k=1}^j \left( \left[ \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \mathbf{Q}_k} \right]^T \cdot [\mathbf{A}_i] + [\mathbf{A}_i]^T \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \mathbf{Q}_k} \right] \right) \quad (6.48)$$

A számításokat először az összeg tagjaira alkalmazzuk, ahol  $\mathbf{Q}_k$  a kiegyensúlyozó erők általános alakban írt oszlop-mátrixa.

Így például felírható a (6.47) Fourier-együtthatókat tartalmazó cél-függvény  $\mathbf{Q}_k$  szerinti deriváltja, amely:

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{A}_i}{\partial \mathbf{Q}_k} \right] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}_k} ([\mathbf{G}_{ij}] \cdot [\mathbf{Q}_j] + [\mathbf{C}_i]) \quad (6.49)$$

Mivel a  $[\mathbf{G}_{ij}]$  és  $[\mathbf{C}_i]$  mátrixok nem függenek az általánosan meghatározott kiegyensúlyozó erőktől, következik, hogy:

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{G}_{ij}}{\partial \mathbf{Q}_k} \right] = 0 \text{ és } \left[ \frac{\partial \mathbf{C}_i}{\partial \mathbf{Q}_k} \right] = 0 \quad (5.50)$$

Figyelembe véve, hogy a (6.47) mátrixegyenletben a  $[\mathbf{C}_i]$  nem függ a  $\mathbf{Q}$  változótól, az  $[\mathbf{A}_i]$  pedig oszlop-mátrix, ebből következtetve a  $\left[ \frac{d\mathbf{A}_i}{d\mathbf{Q}} \right]$  is, akár a (6.49) összefüggés, oszlop-mátrix lesz, a  $\left[ \frac{d\mathbf{A}_i}{d\mathbf{Q}} \right]^T$  pedig sormátrix, amelyek szerkezete szerint természetesen adódnak a következő egyenlőségek:

$$\left[ \frac{d\mathbf{A}_i}{d\mathbf{Q}} \right]^T \cdot [\mathbf{A}_i] = [\mathbf{A}_i]^T \cdot \left[ \frac{d\mathbf{A}_i}{d\mathbf{Q}} \right] \quad (6.51)$$

A (6.47) egyenletet behelyettesítve a (6.46) függvénybe, és figyelembe véve az (6.51) egyenlőséget, a műveletek elvégzése után felírható:

$$\left[ \frac{d\mathbf{E}_p}{d\mathbf{Q}} \right] = \sum_{k=1}^j \left[ \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial \mathbf{Q}_k} \right] = 2 \cdot \sum_{k=1}^j \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}_k} [\mathbf{Q}_j]^T \cdot [\mathbf{G}_{ij}]^T \cdot ([\mathbf{G}_{ij}] \cdot [\mathbf{Q}_j] + [\mathbf{C}_i]) \quad (6.52)$$

Mivel a  $[\mathbf{G}_{ij}]$  egy- vagy kéttengelyes kiegyensúlyozás esetén nem négyzetes mátrix, tehát nincs inverz mátrixa, ezért a minimalizálási feltételt a (6.52) egyenletből fejezzük ki, amely:

$$[\mathbf{G}_{ij}]^T \cdot ([\mathbf{G}_{ij}] \cdot [\mathbf{Q}_j] + [\mathbf{C}_i]) = 0 \quad (6.53)$$

Bevezetve a mátrixszorzatok alábbi jelöléseit:

$$[\mathbf{H}_{jj}] = [\mathbf{G}_{ij}]^T \cdot [\mathbf{G}_{ij}] \quad (6.54)$$

$$[\mathbf{D}_j] = [\mathbf{G}_{ij}]^T \cdot [\mathbf{C}_i] \quad (6.55)$$

Ezekkel a (6.53) feltétel az alábbi alakban írható fel:

$$\left[ \frac{d\mathbf{E}_p}{d\mathbf{Q}} \right] = 0 = ([\mathbf{H}_{jj}] \cdot [\mathbf{Q}_j] + [\mathbf{D}_j]) \quad (6.56)$$

Innen kifejezhetők a kiegyensúlyozó erők optimális értékei,

$$[\mathbf{Q}_j] = -[\mathbf{H}_{jj}]^{-1} \cdot [\mathbf{D}_j] \quad (6.57)$$

### 6.6. Algoritmus egy választott pont optimális rezgéscsökkentésére, egytengelyes kiegyensúlyozás esetén

Abban az esetben, ha a kiegyensúlyozás csak egyetlen tengely szerint történik, például az  $OX$  tengely szerint, a tengelyre szerelt két ellensúly négy általános kiegyensúlyozó erőt visz be a rendszerbe, amelynek megfelelően a (6.47) egyenlet a következő alakot ölti:

$$\begin{bmatrix} A_{px} \\ B_{px} \\ A_{py} \\ B_{py} \\ A_{pz} \\ B_{pz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \\ G_{51} & G_{52} & G_{53} & G_{54} \\ G_{61} & G_{62} & G_{63} & G_{64} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{pxo} \\ B_{pxo} \\ A_{pyo} \\ B_{pyo} \\ A_{pzo} \\ B_{pzo} \end{bmatrix} \quad (6.58)$$

Az optimáló (6.57) rendszer a (6.54) és a (6.55) mátrixokból tevődik össze, ahol  $i=1,2,3,4$ ;  $j=1,2,3,4$  megegyezik az ismeretlenek számával.

Ebben az esetben az  $OX$  és  $OY$  tengelyek hiányoznak, ennek megfelelően a (6.39) egyenlőségekből felírható:

$$\begin{aligned} A_x &= A_{FX} & A_\alpha &= A_{MX} - a_y \cdot (Q_1 + Q_2) + a_z \cdot (R_1 + R_2) \\ B_x &= B_{FX} & B_\alpha &= B_{MX} + a_z \cdot (Q_1 + Q_2) + a_y \cdot (R_1 + R_2) \end{aligned}$$

## 6. A TÉRMECHANIZMUSOK DINAMIKAI KIEGYENSÚLYOZÁSA ÉS OPTIMIZÁLÁSA

$$\begin{aligned}
A_y &= A_{FY} + Q_1 + Q_2 & A_\beta &= A_{MY} - a_1 \cdot R_1 - a_2 \cdot R_2 \\
B_y &= B_{FY} - R_1 - R_2 & B_\beta &= B_{MY} - a_1 \cdot Q_1 - a_2 \cdot Q_2 \\
A_z &= A_{FZ} + R_1 + R_2 & A_\gamma &= A_{MZ} + a_1 \cdot Q_1 + a_2 \cdot Q_2 \\
B_z &= B_{FZ} + Q_1 + Q_2 & B_\gamma &= B_{MZ} - a_1 \cdot R_1 - a_2 \cdot R_2
\end{aligned} \quad (6.59)$$

A (6.59) egyenlőségeket behelyettesítve a (6.42) egyenletekbe, rendre meghatározzuk a Fourier-féle együtthatókat a (6.43) rendszerből. A rezgőmozgást végző kiegyensúlyozatlan gép első harmonikusának együtthatóit a (6.44) egyenlőségek adják. Ismerve a (6.43) rendszer együtthatóit, a tényezők egyenlőségéből rendre kiszámíthatók lesznek a  $G_{ij}$  mátrix tagjai, amelyek kifejezéseit az alábbiakban adjuk meg:

$$\begin{aligned}
G_{11} &= -\frac{y_1 \cdot a_1}{J_z \cdot \omega^2}; G_{12} = -\frac{y_1 \cdot a_2}{J_z \cdot \omega^2}; & G_{13} &= -\frac{z_1 \cdot a_1}{J_y \cdot \omega^2}; G_{14} = -\frac{z_1 \cdot a_2}{J_y \cdot \omega^2}; \\
G_{21} &= -\frac{z_1 \cdot a_1}{J_y \cdot \omega^2}; G_{22} = -\frac{z_1 \cdot a_2}{J_y \cdot \omega^2}; & G_{23} &= \frac{y_1 \cdot a_1}{J_z \cdot \omega^2}; G_{24} = \frac{y_1 \cdot a_2}{J_z \cdot \omega^2}; \\
G_{31} &= \frac{1}{\omega^2} \cdot \left[ \frac{1}{M} + \frac{x_1 \cdot a_1}{J_z} + \frac{z_1 \cdot a_y}{J_x} \right]; & G_{32} &= \frac{1}{\omega^2} \cdot \left[ \frac{1}{M} + \frac{x_1 \cdot a_2}{J_z} + \frac{z_1 \cdot a_y}{J_x} \right]; \\
G_{33} &= -\frac{z_1 \cdot a_z}{J_x \omega^2}; G_{34} = -\frac{z_1 \cdot a_z}{J_x \omega^2} & G_{41} &= -\frac{z_1 \cdot a_z}{J_x \omega^2}; G_{42} = -\frac{z_1 \cdot a_z}{J_x \omega^2}; \\
G_{43} &= -\frac{1}{\omega^2} \cdot \left[ \frac{1}{M} + \frac{x_1 \cdot a_1}{J_z} + \frac{z_1 \cdot a_y}{J_x} \right]; & G_{44} &= -\frac{1}{\omega^2} \cdot \left[ \frac{1}{M} + \frac{x_1 \cdot a_2}{J_z} + \frac{z_1 \cdot a_y}{J_x} \right]; \\
G_{51} &= -\frac{y_1 \cdot a_y}{J_x \omega^2}; G_{52} = -\frac{y_1 \cdot a_y}{J_x \omega^2}; & G_{53} &= \frac{1}{\omega^2} \cdot \left[ \frac{1}{M} + \frac{y_1 \cdot a_z}{J_x} + \frac{x_1 \cdot a_1}{J_y} \right]; \\
G_{54} &= \frac{1}{\omega^2} \cdot \left[ \frac{1}{M} + \frac{y_1 \cdot a_z}{J_x} + \frac{x_1 \cdot a_2}{J_y} \right]; & & \\
G_{61} &= \frac{1}{\omega^2} \cdot \left[ \frac{1}{M} + \frac{y_1 \cdot a_z}{J_x} + \frac{x_1 \cdot a_1}{J_y} \right]; & G_{62} &= \frac{1}{\omega^2} \cdot \left[ \frac{1}{M} + \frac{y_1 \cdot a_z}{J_x} + \frac{x_1 \cdot a_2}{J_y} \right]; \\
G_{63} &= \frac{y_1 \cdot a_y}{J_x \omega^2}; G_{64} = \frac{y_1 \cdot a_y}{J_x \omega^2} & &
\end{aligned} \quad (6.60)$$

Végül, a  $[C_i]$  mátrix tagjai a következők lesznek:

$$[C_i] = \begin{bmatrix} A_{pxo} \\ B_{pxo} \\ A_{pyo} \\ B_{pyo} \\ A_{pzo} \\ B_{pzo} \end{bmatrix} \quad (6.61)$$

Az egyponthoz optimális kiegyensúlyozás, ami az (6.53) mátrixegyenletből is észrevehető, nem más, mint a gép súlypontjába helyezett koordináta-rendszerben választott  $P(x_p, y_p, z_p)$  pont rezgésamplitúdójának minimális értékre való csökkentése, egy külső rögzített koordináta-rendszerhez viszonyítva. A  $P$  pont koordinátáinak változtatásakor különböző értékű kiegyensúlyozó erőket kapunk, ezért az egyponthoz optimizálás csak sajátos esetekre alkalmazható. Ez a megoldás a tehetetlenségi erők és nyomatékok által gerjesztett géptörzs lengésközéppontját a választott pontba helyezi. Gyakorlatilag a választott ponttól távol eső helyeken a test kilengése legjobb esetben változatlan marad vagy megnövekedik.

## SZAKIRODALOM

- [1] Ananov, G. D.: *Kinematika prostranstvennîh ciarnirnîh mehanizmov celiskohoziaictvennîh mašin*. Moskva, 1963.
- [2] Artobolevski, I. I.: *Teoria mecanismelor și mașinilor*. Editura Tehnică, București, 1955.
- [3] Baumgartel, M.; Modler, K. H.: *Neue Erkenntnisse bei der Klassifizierung einfacher räumlicher Mechanismen*. Wiss. Z. der Technischen Universität, Dresden, Heft 4, 1987.
- [4] Biezeno, C. E.; Grammel, R.: *Technicescaia dinamica*. Moskva, 1950.
- [5] Beyer, R.: *Technische Raumkinematik*. Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- [6] Chase, A. M.: *Dynamics of Machinery Systems*. Prentice-Hall Inc., 1970.
- [7] Chace, A. M.; Calahan, A. D.; Orlandea, N.; Smith, D. A.: *Formulation and Numerical Methods in the Computer Evaluation of Mechanical Dynamic Systems*. Kupari, Jugoslavia, vol. A., 61–100.
- [8] Davidov, Ya. S.: *Balancing of Mechanisms*. Izdat. Rechnoi Transport, Moscow, 1963.
- [9] Denavit, J.: Displacement Analysis of Mechanisms Based on  $2 \times 2$  Matrices of Dual Numbers. V.D.I.-Berichte 29 (1956).
- [10] Dimarogonas, A. D.; Sandor G. N.: *General Method for Analysis of Mechanical System*. Kupari, Jugoslavia, 1971, vol. H., 121–131.
- [11] Dittrich, G.: *Maschinendynamik I*. Technischen Hochschule, Westf. Aachen, 1975.
- [12] Dresig, H.; Schönfeld, S.: *Trägheistkraftausgleich für Ebene*. Koppelgetriebe, Dresden, 1971.
- [13] Halmos, R. P.: *Véges dimenziós vektorterek*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1984.
- [14] Harris, C. M.; Crede, C. E.: *Șocuri și vibrații*. Editura Tehnică, București, 1969.
- [15] Homilius, K.: *Prüfeinrichtungen zur Bestimmung von Masse, Massenverteilungen, Betriebs- und Festigkeitseigenschaften von Raumflugkörpern*. Schenck-Druckschrift aus Astronautik Nr. 4/1969.
- [16] Johnson, W. E.: *A Method of Balancing Reciprocating Machines*. Journal of Applied Mechanics, TRANS. ASME, 57 (1935), A81–86.
- [17] Lebedev, P. A.: *Kinematika prostranstvennîh mehanizmov*. Mașinostroenie, Moskva, 1966.
- [18] Loițeanșci, L. G.; Lurie A. J.: *Curs teoreticescoi mehanicii*. Moskva, 1955.

- 
- [19] Ludvig, Gy.: *Gépek dinamikája*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983.
- [20] Mangeron, D.; Irimiciuc, N.: *Mecanica rigidului*. Editura Tehnică, București, 1978.
- [21] Mangeron, D.; Irimiciuc, N.: *Mecanica sistemelor rigide*. Editura Tehnică, București, 1980.
- [22] Mangeron, D.; Irimiciuc, N.: *Mecanica vibrațiilor sistemelor de rigide*. Editura Tehnică, București, 1981.
- [23] Manolescu, N.; Kovacs, Fr.; Orănescu, A.: *Teoria mecanismelor și a mașinilor*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1972.
- [24] Manolescu, N. I.; Maros, D.: *Cinetostatica și dinamica*. Editura Tehnică, București, 1958.
- [25] Maros, D. ș. a.: *Curs de teoria mecanismelor și a mașinilor*. Atelier de multiplicare al I. P., Cluj, 1966.
- [26] Maros, D.: *Mecanisme*. At. de multiplicare al I. P., Cluj, 1980.
- [27] Maros, D.; Orlandea, N.: Contributions to the Determination of the Equations of Motion for Multidegree of Freedom Systems. Ohio, USA, ASME, paper 70-Mech.-29, 1970.
- [28] Máté, M.: *Műszaki mechanika. Kinematika*. Erdélyi Múzeum-Egyesület, Kolozsvár, 2016.
- [29] Müllges, E. G.: *Numerical Algorithms with C*. Springer Verlag, Berlin, 1997.
- [30] Nagy, A.; Sipos, M.: *Géprajz, gépelemek*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.
- [31] Nekrasov, A. I.: Curs de mecanică teoretică (traducere din limba rusă), vol. I-II., Editura Tehnică, București, 1955.
- [32] Orlandea, N.: *Teză de doctorat*. Michigan, 1973.
- [33] Papp, I.: *Contribution on Dynamic Balancing of Spatial Mechanisms*. Teză de doctorat, Cluj, 1999.
- [34] Papp, I.: *The equations of the constrained screw joints*. PRASIC 2002 vol. I, Brașov. ISBN 973-635-064-9, 189-193.
- [35] Papp, I.: *The optimization of the Balancing Mechanisms through the Minimization of Oscillation Amplitude in Several Points Chosen on the Surface of the Machine*. International Conference in Mechanical Engineering, Satu-Mare, April 28-May 1, 2005, ISBN 973-7840-03-08., 282-284.
- [36] Papp, I.: *Optimization of Dynamical Balancing of Mechanisms According to Diminution of Vibration Amplitude at a Given Point*. International Conference in Mechanical Engineering, Satu-Mare, April 28-May 1, 2005, ISBN 973-7840-03-08, 285-287.
- [37] Papp, I.; Máté, M.: *Transformarea generală a două sisteme ortogonale*. PROCEEDINGS CDM 2005, a IV-a conferință de dinamica mașinilor, cu partici-



- pare internațională, 28-30. mai 2005 Brașov, vol. II., ISBN 973-635-513-6, 319–326.
- [38] PAPP, I.; Máté, M.: *Ecuatiile generale ale cuplelor cilindrice*. Buletinul Universității Petrol-Gaze din Ploiești, Vol. LVII Seria Tehnică 4/2005, 133–138.
- [39] Papp, I.; Popa Müller, I.; Gergely, A.: *Karos mechanizmusok kinematikai vizsgálata kényszeregyenletek segítségével*. Contract de cercetare Nr. 1298 din 25-10-2005. Institutul Programelor de cercetare al Fundației Sapientia.
- [40] Papp, I.; Popa Müller, I.; Szilágyi, A.: *A mechanizmust alkotó tagok sebességeinek meghatározása kényszeregyenletek segítségével*. Contract de cercetare Nr. 1051 din 15-11-2006, Institutul Programelor de cercetare al Fundației Sapientia.
- [41] Papp, I.: *Mechanizmusok elmélete*. Scientia Kiadó, Kolozsvár, 2010.
- [42] Pelecudi, Ch.: *Bazele analizei mecanismelor*. Editura Academiei, București, 1967.
- [43] Pelecudi, Ch., *Teoria mecanismelor spațiale*. Ed. Academiei R.S.R., București, 1972.
- [44] Pelecudi, Ch., ș. a.: *Mecanisme*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985.
- [45] Pelecudi, Ch.: *Metoda solidarizării pentru lanțurile cinematice închise*. Șt. cerc. mec. apl., 5, București, 1965.
- [46] Ripianu, A.: *Mecanica solidului rigid*. Editura Tehnică, București, 1974.
- [47] Salvadori, M. ș. a., *Metode numerice în tehnică* (Traducere din limba engleză). București, Editura Tehnică, 1972.
- [48] Sályi, B.; Michelberger, P.; Sályi, P.: *Kinematika és kinetika*. Budapest, Tankönyvkiadó, 1991.
- [49] Serbrenicov, M. G.: *Garmoniceschi analiz*. Ogiz, Moskva, 1948.
- [50] Shigley, J. E.: *Kinematic analysis of Mechanisms*. ed. 2, McGraw-Hill, Mechanical Engineering, 1969.
- [51] Stevensen, E. N.: *Balancing of Machines*. San Francisco, California, ASME, paper 72-Mech.-52, 1972.
- [52] Voinea, R.; Atanasiu, M.: *Metode analitice noi în teoria mecanismelor*. Editura Tehnică, București, 1964.
- [53] Voinea, R.; Voiculescu, D.; Ceaușu, V.: *Mecanica*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1983.
- [54] Zinoviev, V. A.: *Prostranstvennîe mehanizmî s nizșini parami*, Moskva–Leningrad, 1952.

## THE THEORY OF OPTIMAL BALANCING OF MECHANISMS

### SUMMARY

This book is intended to be useful first of all for the students of doctoral schools and all specialists from the field of mechanism and machine theory, who will deepen their knowledge in the field of dynamical balancing of plain and spatial mechanisms.

The chapters of this book are ordered in the logical succession of theoretical knowledge, followed by the mathematical models. These form the ground of all programs written for the computing of the necessary parameters used in the process of optimal balancing. The practice of the theories presented could be possible with the development of numerical computing methods.

Chapter 1 contains all notations and formulae used in the next, the theory of matrix transformation, followed by the computing of the small vibration amplitudes.

Chapter 2 presents the constraint equation of the joints, with the use of matrix transformation, written by successive rotations about axes OX and OY. This is done for all particular cases in order to obtain the positions of all elements of the mechanism.

Chapter 3 contains the constraint equations of the velocities. They are treated in case of superposition of the axes  $O_{ij}^*x_i^*$  and  $O_{ji}^*x_j^*$  respectively  $O_{ij}^*y_i^*$  and  $O_{ji}^*y_j^*$ , considered for the relative position of the joined elements „i” and „j”.

Chapter 4 describes the constraint equation of the accelerations, in the superposition hypothesis of the axis identical to those presented in the previous chapter.

Chapter 5 presents the constraint equations for the positions, velocities and accelerations. It is performed admitting the hypothesis of superposition of rotation axes  $O_{ij}^*z_i^*$  and  $O_{ji}^*z_j^*$ . The calculus here is based on Euler's angles.

Chapter 6 deals with the balancing possibilities of the inertial forces and their moments, about the three perpendicular axes of balancing. There are discussed also the partial balancing possibilities, considering only one or two balancing axes. Here, the optimum balance is defined as the setting that minimizes the perturbing forces and moments. It is followed by the model of minimizing the amplitude of the vibrations in a single point of the machine body, respectively in a finite number of body points.

## CONTENTS

Introduction .....	9
<b>1. Transformations and applied mathematical methods.....</b>	<b>13</b>
1.1. The general transformation of two orthogonal systems.....	13
1.2. The establishment of the components of the angle speed vector $\vec{\omega}_i$ and angle acceleration $\vec{\varepsilon}_i$ , related to the inertial system $O_i x_i y_i z_i$ linked to the “ <i>i</i> ” element.....	21
1.3. Transformation of two coordinate systems defined by Euler’s angle .....	23
1.3.1. The establishment of the components of the angle speed vector $\vec{\omega}_i$ and angle acceleration $\vec{\varepsilon}_i$ , related to the inertial system $O_i x_i y_i z_i$ linked to the “ <i>i</i> ” element.....	26
1.4. The reduction of the forces and the moment of inertial forces compared to the fixed system.....	30
1.5. Exposition of periodic equations. in Fourier line .....	33
1.6. Notes .....	37
<b>2. Constraint equations .....</b>	<b>39</b>
2.1. Basic principles .....	39
2.2. Positions of constraint equations in case of overlapping of the coordinate axis $O_{ij}^* x_i^*$ and $O_{ji}^* x_j^*$ .....	47
2.2.1. Cylindrical joint .....	47
2.2.2. Revolute joint .....	48
2.2.3. Translational joint .....	49
2.2.4. Spherical joint .....	50
2.2.5. Universal joint.....	51
2.2.6. Screw joint .....	53

2.3. Positions of constraint equations in case of overlapping of the coordinate axis $O_{ij}^*x_i^*$ and $O_{ji}^*x_j^*$ .....	54
2.3.1. Cylindrical joint .....	56
2.3.2. Revolute joint.....	57
2.3.3. Translational joint.....	57
2.3.4. Spherical joint .....	58
2.3.5. Universal joint.....	58
2.3.6. Screw joint.....	59
<b>3. The constraint equations of speeds .....</b>	<b>61</b>
3.1. The constraint equations of speeds in case of overlapping of the axis $O_{ij}^*x_i^*$ and $O_{ji}^*x_j^*$ .....	61
3.1.1. Cylindrical joint .....	64
3.1.2. Revolute joint .....	65
3.1.3. Translational joint .....	66
3.1.4. Spherical joint .....	67
3.1.5. Universal joint.....	68
3.1.6. Screw joint.....	69
3.2. The constraint equations of speeds of overlapping of the axis $O_{ij}^*y_i^*$ and $O_{ji}^*y_j^*$ .....	71
3.2.1. Cylindrical joint .....	71
3.2.2. Revolute joint .....	73
3.2.3. Translational joint .....	74
3.2.4. Spherical joint .....	75
3.2.5. Universal joint.....	75
3.2.6. Screw joint.....	76
<b>4. Constraint equations of accelerations .....</b>	<b>79</b>
4.1. The constraint equations in case of overlapping of the coordinate axis $O_{ij}^*x_i^*$ and $O_{ji}^*x_j^*$ .....	79
4.1.1. Cylindrical joint .....	85
4.1.2. Revolute joint.....	85
4.1.3. Translational joint.....	87
4.1.4. Spherical joint .....	88
4.1.5. Universal joint.....	89
4.1.6. Screw joint.....	90

4.2. The constraint equations in case of overlapping of the coordinate axis $O_{ij}^*y_i^*$ and $O_{ji}^*y_j^*$ .....	91
4.2.1. Cylindrical joint .....	92
4.2.2. Revolute joint .....	93
4.2.3. Translational joint .....	95
4.2.4. Spherical joint .....	95
4.2.5. Universal joint .....	96
4.2.6. Screw joint .....	98
<b>5. The constraint equations of positions with Euler's angles</b> .....	<b>99</b>
5.1. Basic principles .....	99
5.2. The constraint equations of positions with Euler's angles in case of overlapping of the coordinate axis $O_{ij}^*z_i^*$ and $O_{ji}^*z_j^*$ .....	105
5.2.1. Spherical joint .....	105
5.2.2. Universal joint .....	105
5.2.3. Cylindrical joint .....	107
5.2.4. Translational joint .....	109
5.2.5. Revolute joint .....	110
5.2.6. Screw joint .....	111
5.3. The constraint equations of speeds in case of overlapping of the axis $O_i^*z_i^*$ and $O_j^*z_j^*$ .....	112
5.3.1. Spherical joint .....	113
5.3.2. Universal joint .....	115
5.3.3. Cylindrical joint .....	116
5.3.4. Translational joint .....	117
5.3.5. Revolute joint .....	118
5.3.6. Screw joint .....	120
5.4. The constraint equations of accelerations .....	123
5.4.1. Spherical joint .....	114
5.4.2. Universal joint .....	124
5.4.3. Cylindrical joint .....	125
5.4.4. Translational joint .....	127
5.4.5. Revolute joint .....	129
5.4.6. Screw joint .....	131

<b>6. The dynamic balancing of spatial mechanisms and its optimization</b> .....	133
6.1. Total balancing .....	133
6.2. Optimal balancing by reducing inertial forces and moments, to a minimum value .....	138
6.3. Practical implementation .....	142
6.3.1. Determination of coefficients of optimal balancing forces, on the first balancing axis.....	142
6.3.2. Determination of coefficients of optimal balancing forces, on the second balancing axis, rotating in opposite direction .....	144
6.3.3. Example.....	148
6.4. Determining the vibration magnitude of a judging point, chosen on the machine.....	149
6.5. Optimization algorithm with reducing the vibration magnitude of multiple judging points on the machine .....	153
6.6. Optimization algorithm by minimizing the oscillation of a chosen point, in case of balancing on a single axis.....	155
 Bibliography .....	 158
 The Theory of Optimal Balancing of Mechanisms ( <i>Summary</i> ) .....	 161
Contents.....	163
 Theorie des optimalen Auswuchtens der Mechanismen ( <i>Zusammenfassung</i> ) ....	 167
Inhalt.....	169
 Teoria echilibrării optime a mecanismelor ( <i>Rezumat</i> ).....	 173
Cuprins .....	175

## THEORIE DES OPTIMALEN AUSWUCHTENS DER MECHANISMEN

### ZUSAMMENFASSUNG

Das wesentliche Erneuerung der angewandte Technische Wissenschaften, und in Rahmen diesen auch der Mechanismen-, die am Ende XX. Jahrhundert begann und auch heute verläuft, ist ohne die Anwendung der Rechenanlagen unvorstellbar. In diesen Umständen nötig ist, die Modellaufbau anlassende Grundidee nicht zu dem Vergessen verurteilen hinter die großartige, elegante und immer mehr beschleunigte Rechnungen.

Der Opfer Herrn Maschinenbauingenieure Dr. István Papp, außerordentlicher Professor der Sapientia Universität, *Theorie des optimalen Auswuchtens der Mechanismen* ist mit dem Wunsch der Einhaltung der oberen genannten Idee gebildet.

Als Erstes ist zu klarstellen daß die hier vorgebrachter Kenntnisse klar überschreiten der Tiefe eines Universitätslehrbuchs. Um die hier Geschriebenen zu verstehen, gründliche Mathematik, Mechanik und Mechanismen Kenntnisse unentbehrlich sind. Es steht aber zu wirklicher Hilfe aller die im Rahmen der Mechanismen, Maschinenelementen und auch Robotik Tiefforschungen durchführen möchten – erst auf allem Forscher und Doktoranten.

Die fünf Abschnitte des Buchs betrachten die Problematik der Räumlichen Mechanismen, ab die nötige mathematische Begriffe bis das dynamische Auswuchten, mit außergewöhnlicher Transparenz und Vollständigkeit.

Erster Abschnitt erreichte die im Späteren nötige mathematische Grundlagen. Die allgemeine Koordinatentransformation ist nicht durch Eulerschen Winkeln, sondern nacheinander zugängige orthogonalen Drehungen vorgestellt.

Zweiter Abschnitt stellt allen mathematischen Modellen der bei der Gelenken von niedrigen Klassen aufbaubaren Beschränkungen vor, mit ausführlichen Erklärungen. Die Analyse ist für alle Gelenktypen erbreitet. Das allgemeinere Ziel hier steht in der Rechnung relativer oder Absoluter Bewegungen jedem Glied. Die Methode



begründet sich auf der geschlossene Vektorpolygon, die in der Beschränkungsgleichungssystem transformiert ist, deren Lösungen geben de versuchten Bewegungen.

Dritter und vierter Abschnitte passen in Struktur, Stil und berufliche Meldungen mit dem ersten Abschnitt. Die hier gegebenen mathematische Deduktionen folgen im Beschränkungsgleichungen der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, mit gleicher wissenschaftlicher Genauigkeit.

Fünfter Abschnitt enthält der Aufbau der Problematik des dynamischen Auswuchtens, und die entsprechenden Lösungen. Der Berechnung des die Struktur belastende Kräfte entsprechendem inertialer Zweibeins folgen die Rechnungen der Masse, und Position der Gegengewichte. Die theoretisch Perfekt, aber kaum Durchführbarer dreiachsiger Auswuchtmodell ist ausführlich geschrieben. Es ist belgeitet bei den Modellen der zweiachsigen und einachsigen Auswuchtmodellen – dargestellten als partikuläre Fälle das dreiachsige Modell.

Die mathematischen Modelle sind für die allgemeine Fälle der Glieder vorbereitet und deswegen die in der möglichst höheren Komplexität aufzeigender Gleichungen sich sehen lassen. Die Geometrie einzelbaren Gliedes resultiert durch die Vereinfachung der allgemeinen Gleichungen. Der Leser des Buchs kann dadurch leichter empfinden der Kraft der allgemeinen Modelle, und die partikulären geometrischen und kinematischen Eigenschaften einzelner Glieder

## INHALT

Vorwort .....	9
<b>1. Angewandte Matrix-Rechnung</b> .....	<b>13</b>
1.1. Transformation von zwei Koordinatensystemen .....	13
1.2. Die Bestimmung der Komponenten der $\vec{\omega}_i$ Winkelgeschwindigkeit- und $\vec{\varepsilon}_i$ Winkelbeschleunigungvektoren zu der Inertiehaupt- richtungen den Gliedern "i" .....	21
1.3. Koordinatentransformation mit Hilfe Eulerschen Winkeln.....	23
1.3.1. Das Bestimmung der Komponenten der $\vec{\omega}_i$ Winkelgeschwindigkeit- und $\vec{\varepsilon}_i$ Winkelbeschleunigungvektoren zu der Inertiehaupttrichtungen den Gliedern "i" .....	26
1.4. Reduktion der wirkenden Inertiekräfte und ihren Momenten zu einem befestigten Koordinatensystem .....	30
1.5. Fourier Transformation der periodische Funktionen .....	33
1.6. Bezeichnungen .....	37
<b>2. Die Beschränkungsgleichungen der kinematische Paare</b> .....	<b>39</b>
2.1. Fundamentale Prinzipien.....	39
2.2. Die Beschränkungsgleichungen der kinematische Paare in Fall der Übereinstimmung der Achsen $O_{ij}^*x_i^*$ und $O_{ji}^*x_j^*$ .....	47
2.2.1. Zylindrisches Gelenk .....	47
2.2.2. Drehgelenk .....	48
2.2.3. Gleitgelenk (Kreuzkopf) .....	49
2.2.4. Kugelgelenk.....	50
2.2.5. Allgemeines Gelenk (Kardanisches oder Zapfkugelgelenk).....	51
2.2.6. Gewindegelenk .....	53

2.3. Die Beschränkungsgleichungen der kinematische Paare in Fall der Übereinstimmung der Achsen $O_{ij}^*x_i^*$ und $O_{ji}^*x_j^*$ .....	54
2.3.1. Zylindrisches Gelenk .....	56
2.3.2. Drehgelenk .....	57
2.3.3. Gleitgelenk (Kreuzkopf) .....	57
2.3.4. Kugelgelenk.....	58
2.3.5. Allgemeines Gelenk (Kardanisches oder Zapfkugelgelenk).....	58
2.3.6. Gewindegelenk .....	59
<b>3. Die Beschränkungsgleichungen der Geschwindigkeiten.....</b>	<b>61</b>
3.1. Die Beschränkungsgleichungen der Geschwindigkeiten im Fall der Übereinstimmung der Achsen $O_{ij}^*x_i^*$ und $O_{ji}^*x_j^*$ .....	61
3.1.1. Zylindrisches Gelenk .....	64
3.1.2. Drehgelenk .....	65
3.1.3. Gleitgelenk (Kreuzkopf) .....	66
3.1.4. Kugelgelenk.....	67
3.1.5. Allgemeines Gelenk (Kardanisches oder Zapfkugelgelenk).....	68
3.1.6. Gewindegelenk .....	69
3.2. Die Beschränkungsgleichungen der Geschwindigkeiten im Fall der Übereinstimmung der Achsen $O_{ij}^*y_i^*$ and $O_{ji}^*y_j^*$ .....	71
3.2.1. Zylindrisches Gelenk .....	71
3.2.2. Drehgelenk .....	73
3.2.3. Gleitgelenk (Kreuzkopf) .....	74
3.2.4. Kugelgelenk.....	75
3.2.5. Allgemeines Gelenk (Kardanisches oder Zapfkugelgelenk).....	75
3.2.6. Gewindegelenk .....	76
<b>4. Die Beschränkungsgleichungen der Beschleunigungen .....</b>	<b>79</b>
4.1. Die Beschränkungsgleichungen der Geschwindigkeiten im Fall der Übereinstimmung der Achsen $O_{ij}^*x_i^*$ und $O_{ji}^*x_j^*$ .....	79
4.1.1. Zylindrisches Gelenk .....	85
4.1.2. Drehgelenk .....	85
4.1.3. Gleitgelenk (Kreuzkopf) .....	87
4.1.4. Kugelgelenk.....	88
4.1.5. Allgemeines Gelenk (Kardanisches oder Zapfkugelgelenk).....	89
4.1.6. Gewindegelenk .....	90

4.2. Die Beschränkungsgleichungen der Geschwindigkeiten im Fall  
 der Übereinstimmung der Achsen  $O_{ij}^*y_i^*$  und  $O_{ji}^*y_j^*$  .....91

4.2.1. Zylindrisches Gelenk .....92

4.2.2. Drehgelenk .....93

4.2.3. Gleitgelenk (Kreuzkopf) .....95

4.2.4. Kugelgelenk.....95

4.2.5. Allgemeines Gelenk (Kardanisches oder Zapfkugelgelenk) .....96

4.2.6. Gewindegelenk .....98

**5. Die Beschränkungsgleichungen der kinematische Paare mit Benutzung**

**Eulerschen Winkeln** .....99

5.1. Fundamentale Prinzipien.....99

5.2. Die Beschränkungsgleichungen der Lagen im Fall der Übereinstimmung  
 der Achsen  $O_{ij}^*z_i^*$  und  $O_{ji}^*z_j^*$  .....105

5.2.1. Kugelgelenk.....105

5.2.2. Allgemeines Gelenk (Kardanisches oder Zapfkugelgelenk).....105

5.2.3. Zylindrisches Gelenk .....107

5.2.4. Gleitgelenk (Kreuzkopf) .....109

5.2.5. Drehgelenk .....110

5.2.6. Gewindegelenk .....111

5.3. Die Beschränkungsgleichungen der Geschwindigkeiten im Fall  
 der Übereinstimmung der Achsen  $O_i^*z_i^*$  und  $O_j^*z_j^*$  .....112

5.3.1. Kugelgelenk.....113

5.3.2. Allgemeines Gelenk (Kardanisches oder Zapfkugelgelenk).....115

5.3.3. Zylindrisches Gelenk .....116

5.3.4. Gleitgelenk (Kreuzkopf) .....117

5.3.5. Drehgelenk .....118

5.3.6. Gewindegelenk .....120

5.4. Die Beschränkungsgleichungen der Beschleunigungen im Fall  
 der Übereinstimmung der Achsen  $O_i^*z_i^*$  und  $O_j^*z_j^*$  .....123

5.4.1. Kugelgelenk.....114

5.4.2. Allgemeines Gelenk (Kardanisches oder Zapfkugelgelenk).....124

5.4.3. Zylindrisches Gelenk .....125

5.4.4. Gleitgelenk (Kreuzkopf) .....127

5.4.5. Drehgelenk .....129

5.4.6. Gewindegelenk .....131

<b>6. Das dynamische Auswuchten und Optimierung der Räumliche Mechanismen</b> .....	133
6.1. Das komplette Auswuchten .....	133
6.2. Optimaler Auswuchten durch Minimierung der auf der Maschinenkörper wirkenden Inertiekräfte und Momenten.....	138
6.3. Praktische Anwendung .....	142
6.3.1. Bestimmung der Komponenten der auf dem Tragwellen der Gegengewichte wirkenden optimalen Auswuchtkräften .....	142
6.3.2. Bestimmung der Komponenten der auf dem zweiten, dem ersten Auswuchtachse in der Gegenrichtung drehenden zweiter Achsen wirkenden optimalen Auswuchtkräften .....	144
6.3.3. Beispiel.....	148
6.4. Bestimmung der Schwingungsamplituden eines beliebigen Punkts auf dem Maschinenkörper.....	149
6.5. Bestimmung der Schwingungsamplituden einer gegebenen Punkt .....	153
6.6. Algorithmus für optimaler Verminderung der Schwingungsamplituden eines gewählten Punkts, im Fall der einachsigen Auswuchten .....	155
Fachliteratur .....	158
The Theory of Optimal Balancing of Mechanisms ( <i>Summary</i> ) .....	161
Contents.....	163
Theorie des optimalen Auswuchtens der Mechanismen ( <i>Zusammenfassung</i> ) ....	167
Inhalt.....	169
Teoria echilibrării optime a mecanismelor ( <i>Rezumat</i> ).....	173
Cuprins .....	175

## TEORIA ECHILIBRĂRII OPTIME A MECANISMELOR

### EXTRAS

Lucrarea de față se adresează în primul rând doctoranzilor, dar și specialiștilor din domeniu precum și tuturor ce vor să aprofundeze cunoștințele profesionale privind echilibrarea dinamică ale mecanismelor plane și spațiale.

Capitolele cărții sunt ordonate după succesiunea logică a noțiunilor teoretice și a modelelor matematice necesare realizării programelor pentru determinarea tuturor parametrilor, necesari pentru echilibrarea optimă a mecanismelor. Aplicarea în practică a teoriilor prezentate a devenit posibilă odată cu dezvoltarea metodelor numerice de calcul.

Capitolul 1 cuprinde notațiile și formulele utilizate, teoria transformărilor matriciale, urmate de formulele necesare pentru determinarea componentelor amplitudinii vibrațiilor mici.

Capitolul 2 prezintă ecuațiile de constrângere ale cuplelor cinematice cu ajutorul transformărilor matriciale, obținute prin rotirea succesivă a axelor de coordonate  $OX$  și  $OY$ , pentru toate cazurile particulare, în scopul determinării pozițiilor elementelor mobile din mecanism.

Capitolul 3 cuprinde ecuațiile de constrângere ale vitezelor corespunzător cazurilor de suprapunere ale axelor  $O_{ij}^*x_i^*$  și  $O_{ji}^*x_j^*$  respectiv  $O_{ij}^*y_i^*$  și  $O_{ji}^*y_j^*$ , realizate în baza pozițiilor relative ale elementelor cuplate „i” și „j”.

Capitolul 4 descrie ecuațiile de constrângere ale accelerațiilor corespunzător cazurilor de suprapunere ale axelor  $O_{ij}^*x_i^*$  și  $O_{ji}^*x_j^*$  respectiv  $O_{ij}^*y_i^*$  și  $O_{ji}^*y_j^*$ , în ipotezele capitolului precedent.

Capitolul 5 prezintă ecuațiile de constrângere ale pozițiilor, vitezelor și accelerațiilor în cazul suprapunerii axelor de rotație  $O_{ij}^*z_i^*$  și  $O_{ji}^*z_j^*$  definite prin unghiurile lui Euler.

Capitolul 6 tratează posibilitățile de echilibrare ale forțelor de inerție și momentelor forțelor de inerție, după cele trei axe ortogonale de echilibrare. Posibilitățile de echilibrare parțiale sunt tratate în ipoteza după o singură axă, sau după două axe de echilibrare. În acest capitol se prezintă echilibrarea optimă prin reducerea la minim a forțelor și momentelor perturbatoare. De asemenea este prezentat modelul de reducere la minim a vibrațiilor unui punct arbitrar ales de pe corpul mașinii, respectiv modul de calcul al amplitudinilor vibrațiilor din orice punct ales de pe corpul mașinii.

## CUPRINS

Prefață .....	9
<b>1. Transformări și metode matematice aplicate</b> .....	<b>13</b>
1.1. Transformarea generală a două sisteme ortogonale.....	13
1.2. Determinarea componentelor vectorului viteză unghiulară $\vec{\omega}_i$ și $\vec{\omega}_i$ acceleerația unghiulară $\vec{\varepsilon}_i$ , față de sistemul inerțial $O_i x_i y_i z_i$ legat de elementul "I" .....	21
1.3. Transformarea a două sisteme de coordonate prin unghiurile lui Euler .....	23
1.3.1. Determinarea componentelor vectorului viteză unghiulară $\vec{\omega}_i$ și acceleerația unghiulară $\vec{\varepsilon}_i$ , față de sistemul inerțial $O_i x_i y_i z_i$ legat de elementul "I" .....	26
1.4. Reducerea forțelor și momentul forțelor de inerție față de sistemul fix .....	30
1.5. Dezvoltarea în serie Fourier a funcțiilor periodice .....	33
1.6. Notății.....	37
<b>2. Ecuații de constrângere</b> .....	<b>39</b>
2.1. Principii de bază .....	39
2.2. Ecuațiile de constrângere ale pozițiilor, în cazul suprapunerii axelor de coordonate $O_{ij}^* x_i^*$ și $O_{ji}^* x_j^*$ .....	47
2.2.1. Cupla cilindrică .....	47
2.2.2. Cupla rotoidă .....	48
2.2.3. Cupla de translație .....	49
2.2.4. Cupla sferică.....	50
2.2.5. Cupla universală.....	51
2.2.6. Cupla elicoidală .....	53



2.3. Ecuțiile de constrângere ale pozițiilor, în cazul suprapunerii axelor de coordonate $O_{ij}^*x_i^*$ și $O_{ji}^*x_j^*$ .....	54
2.3.1. Cupla cilindrică.....	56
2.3.2. Cupla rotoidă .....	57
2.3.3. Cupla de translație.....	57
2.3.4. Cupla sferică.....	58
2.3.5. Cupla universală.....	58
2.3.6. Cupla elicoidală.....	59
<b>3. Ecuțiile de constrângere ale vitezelor.....</b>	<b>61</b>
3.1. Ecuțiile de constrângere ale vitezelor, în cazul suprapunerii axelor de coordonate $O_{ij}^*x_i^*$ și $O_{ji}^*x_j^*$ .....	61
3.1.1. Cupla cilindrică.....	64
3.1.2. Cupla rotoidă .....	65
3.1.3. Cupla de translație .....	66
3.1.4. Cupla sferică.....	67
3.1.5. Cupla universală.....	68
3.1.6. Cupla elicoidală.....	69
3.2. Ecuțiile de constrângere ale vitezelor, în cazul suprapunerii axelor de coordonate $O_{ij}^*y_i^*$ și $O_{ji}^*y_j^*$ .....	71
3.2.1. Cupla cilindrică.....	71
3.2.2. Cupla rotoidă .....	73
3.2.3. Cupla de translație .....	74
3.2.4. Cupla sferică.....	75
3.2.5. Cupla universală.....	75
3.2.6. Cupla elicoidală.....	76
<b>4. Ecuțiile de constrângere ale accelerațiilor .....</b>	<b>79</b>
4.1. Ecuțiile de constrângere ale accelerațiilor, în cazul suprapunerii axelor de coordonate $O_{ij}^*x_i^*$ și $O_{ji}^*x_j^*$ .....	79
4.1.1. Cupla cilindrică.....	85
4.1.2. Cupla rotoidă .....	85
4.1.3. Cupla de translație.....	87
4.1.4. Cupla sferică.....	88
4.1.5. Cupla universală.....	89
4.1.6. Cupla elicoidală.....	90

4.2. Ecuțiile de constrângere ale accelerațiilor, în cazul suprapunerii axelor de coordonate $O_{ij}^*y_i^*$ și $O_{ji}^*y_j^*$ .....	91
4.2.1. Cupla cilindrică .....	92
4.2.2. Cupla rotoidă .....	93
4.2.3. Cupla de translație.....	95
4.2.4. Cupla sferică.....	95
4.2.5. Cupla universală .....	96
4.2.6. Cupla elicoidală.....	98
<b>5. Ecuțiile de constrângere definite cu unghiurile Euler .....</b>	<b>99</b>
5.1. Principii de bază .....	99
5.2. Ecuțiile de constrângere ale pozițiilor, în cazul suprapunerii axelor de coordonate $O_{ij}^*z_i^*$ și $O_{ji}^*z_j^*$ .....	105
5.2.1. Cupla sferică .....	105
5.2.2. Cupla universală .....	105
5.2.3. Cupla cilindrică .....	107
5.2.4. Cupla de translație .....	108
5.2.5. Cupla rotoidă .....	109
5.2.6. Cupla elicoidală .....	110
5.3. Ecuțiile de constrângere ale vitezelor, în cazul suprapunerii axelor de coordonate $O_i^*z_i^*$ și $O_j^*z_j^*$ .....	111
5.3.1. Cupla sferică .....	112
5.3.2. Cupla universală.....	113
5.3.3. Cupla cilindrică.....	115
5.3.4. Cupla de translație .....	116
5.3.5. Cupla rotoidă .....	117
5.3.6. Cupla elicoidală .....	118
5.4. Ecuțiile de constrângere ale accelerațiilor, în cazul suprapunerii axelor de coordonate $O_i^*z_i^*$ și $O_j^*z_j^*$ .....	120
5.4.1. Cupla sferică.....	123
5.4.2. Cupla universală.....	124
5.4.3. Cupla cilindrică.....	125
5.4.4. Cupla de translație.....	127
5.4.5. Cupla rotoidă .....	129
5.4.6. Cupla elicoidală .....	131

<b>6. Echilibrarea dinamică ale mecanismelor spațiale și optimizarea echilibrării</b> .....	133
6.1. Echilibrarea totală.....	133
6.2. Echilibrarea optimă prin reducerea la valoarea minimă a forțelor de inerție și ale momentelor forțelor de inerție .....	138
6.3. Aplicație practică .....	142
6.3.1. Determinarea coeficienților forțelor optime de echilibrare, care acționează pe prima axă de echilibrare.....	142
6.3.2. Determinarea coeficienților forțelor optime de echilibrare, care acționează pe a doua axă de echilibrare, care se rotește în sens opus.....	144
6.3.3. Exemplu .....	148
6.4. Determinarea amplitudinii vibrațiilor unui punct arbitrar ales de pe corpul mașinii.....	149
6.5. Algoritm de optimizare, prin micșorarea amplitudinii vibrațiilor puncte arbitrar alese de pe corpul mașinii .....	153
6.6. Algoritm de optimizare prin minimalizarea oscilațiilor punctului ales, în cazul echilibrării după o singură axă.....	155
Bibliografie .....	158
The Theory of Optimal Balancing of Mechanisms ( <i>Summary</i> ) .....	161
Contents.....	163
Theorie des optimalen Auswuchtens der Mechanismen ( <i>Zusammenfassung</i> ) ....	167
Inhalt.....	169
Teoria echilibrării optime a mecanismelor ( <i>Rezumat</i> ).....	173
Cuprins .....	175

## **Á SOROZAT EDDIG MEGJELENT KÖTETEI**

1. Jodál Endre: Számítástechnika az ezredforduló küszöbén. 1992.
2. Pálfalvi Attila: Porkohászat. 1993.
3. Bagyinszki Gyula – Bitay Enikő: Bevezetés az anyagtechnológiák informatikájába. 2007.
4. Bitay Enikő: Lézeres felületkezelés és modellezés. 2007.
5. Bagyinszki Gyula – Bitay Enikő: Felületkezelés. 2009.
6. Forgó Zoltán: Bevezetés a mechatronikába. 2009.
7. Tolvaly-Roşca Ferenc: A számítógépes tervezés alapjai. AutoLisp és Autodesk Inventor alapismeretek. 2009.
8. Bagyinszki Gyula – Bitay Enikő: Hegesztéstechnika I. Eljárások és gépesítés. 2010.
9. Bagyinszki Gyula – Bitay Enikő: Hegesztéstechnika II. Berendezések és mérések. 2010.
10. Máté Márton: Műszaki mechanika – kinematika. 2010.
11. Bitay Enikő: Anyagtudományi laboratórium I. Tulajdonságminősítő vizsgálatok. 2011.
12. Máté Márton: Hengeres fogaskerekek gyártószerszámai. 2016.
13. Tolvaly-Roşca, Ferenc: Gépelemek. 2019

$$\begin{bmatrix}
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -b_1 & -b_2 & -c_1 & -c_2 & 0 & 0 \\
 -b_z & b_x & b_x & c_1 & c_2 & 0 & 0 \\
 b_x & b_z & b_x & 0 & 0 & -c_1 & -c_2 \\
 0 & -b_1 & -b_2 & -c_x & -c_x & c_y & c_y \\
 -b_2 & 0 & 0 & c_y & c_y & c_x & c_x
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 U_1 \\
 U_2 \\
 I_1 \\
 I_2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 A_{FX} \\
 B_{FX} \\
 A_{FY} \\
 B_{FY} \\
 A_{FZ} \\
 B_{FZ} \\
 A_{MX} \\
 B_{MX} \\
 A_{MY} \\
 B_{MY} \\
 A_{MZ} \\
 B_{MZ}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 A_{\Sigma FX} \\
 B_{\Sigma FX} \\
 A_{\Sigma FY} \\
 B_{\Sigma FY} \\
 A_{\Sigma FZ} \\
 B_{\Sigma FZ} \\
 A_{\Sigma MX} \\
 B_{\Sigma MX} \\
 A_{\Sigma MY} \\
 B_{\Sigma MY} \\
 A_{\Sigma MZ} \\
 B_{\Sigma MZ}
 \end{bmatrix}$$

Jelen mű a mechanizmusok, gépszerkezetten, illetve robotok tudományának mélységeibe kalauzolja a tisztelt Olvasót.

Bár a könyvet elsősorban a doktoranduszhallgatók és kutatók figyelmébe ajánljuk, a magiszteri képzésben részt vevő diákok és a gyakorló mérnökök is bizalommal forgathatják.

Meggyőződésünk, hogy – bár nem egyszerű és könnyű munkára vállalkozik az Olvasó, ha a jelen könyvben feltárt eszméket és elméletet próbálja elsajátítani – a gépszerkesztők és gyakorló mérnökök az idáig ismert leghatékonyabb fegyver birtokosai lesznek, amivel biztos megoldást találnak a gépstruktúrák megalkotásának műszaki konfliktusokkal igen-igen terhes világában.

ISBN 978-606-739-155-8



9 786067 391558